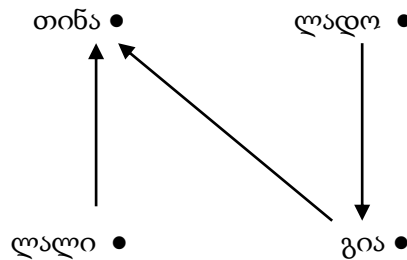


ამ დავალებაში მოცემული სიტუაცია, რომ თვალსაჩინოდ წარმოვიდგინოთ, ამისთვის შევადგინოთ ნახაზი



ნახაზზე ისრებით ნაჩვენებია ბურთების გადაცემის მიმართება. ადვილად დავასკვნით, რადგანაც თითოეულმა ბურთი გადაუგდო დანარჩენიდან მხოლოდ ერთს, ამიტომ თინამ ბურთი მიიღო ლალისაგან და გიასაგან. არ შეიძლება მომხდარიყო ა) ვარიანტი. ე. ი. პ ა ს უ ხ ი ა ა).

მაგალითი. მოცემულია:

- ყველა ფილოსოფოსი განათლებულია;
- საქართველოში ცხოვრობენ განათლებულები.

დასკვნა: „საქართველოში ცხოვრობენ ფილოსოფოსები“

- ა) გამომდინარეობს თითოეული წინადადებიდან ცალ-ცალკე;
- ბ) გამომდინარეობს ერთობლივად ორივე წინადადებიდან;
- გ) გამომდინარეობს მხოლოდ ერთ-ერთი წინადადებიდან;
- დ) არ გამომდინარეობს მოცემული წინადადებებიდან.

აქ არ არის შესრულებული საჭირო პირობები და არ შეიძლება ტრანზიტულობის თვისების გამოყენება. ამიტომ დასკვნა არ გამომდინარეობს მოცემულობიდან. პ ა ს უ ხ ი : დ).

მაგალითი. მოცემულია:

- ყველა ფეხბურთელი ახალგაზრდაა;
- ყველა ახალგაზრდა ჯანმრთელია;
- მხოლოდ ის ჯანმრთელი ადამიანები არიან სათადარიგოთა სკამზე, რომლებიც არ არიან ახალგაზრდები.

ამ დებულებების ჭეშმარიტების პირობაში, ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელია აუცილებლად მცდარი?

- ა) თუ ახალგაზრდა ფეხბურთელი არ არის, მაშინ ის ჯანმრთელი არ არის;
- ბ) თუ ადამიანი ჯანმრთელი არ არის, მაშინ ის ახალგაზრდა არ არის;
- გ) არსებობენ სათადარიგოთა სკამზე მყოფი ფეხბურთელები;
- დ) არსებობენ ჯანმრთელი ფეხბურთელები.

პირველი ორი წანამდვრიდან გამოდის, რომ ყველა ფეხბურთელი ჯანმრთელია. რადგან, მესამე წანამდვრის თანახმად, ახალგაზრდა ფეხბურთელები სათადარიგოთა სკამზე არ არიან, ამიტომ ფეხბურთელები არ არიან სათადარიგოთა სკამზე. პ ა ს უ ხ ი : გ).

მაგალითი. გამოძიებით დადგინდა, რომ სახლში ორი ოთახი იყო, მძარცველები სულ სამნი იყვნენ - **A**, **B** და **C**. ერთი ცდილობდა სეიფის გახსნას, ერთი მას ეხმარებოდა, ერთიც მეორე ოთახში იყო. გარდა ამისა:

- თუ **C** მეორე ოთახში არ იყო, სეიფს ხსნიდა **B**;
 - თუ **B** მეორე ოთახში იყო, **C** დამხმარე არ იქნებოდა;
 - თუ **A** ხსნიდა სეიფს, მაშინ **B** მეორე ოთახში უნდა ყოფილიყო.
- ვინ ხსნიდა სეიფს?

თუ **C** მეორე ოთახში არ იყო, მაშინ პირველი მოცემულობიდან ვასკვნით, რომ სეიფს ხსნიდა **B**. ახლა ვთქვათ, **C** იყო მეორე ოთახში. მაშინ პირველ ოთახში იქნებოდა **A** და **B**, რაც ეწინააღმდეგება მესამე პირობას. ე. ი. სეიფს ხსნიდა **B**. პ ა ს უ ხ ი : ბ).

მაგალითი. მოცემულია:

- თუ **A** კაცი მატყუარაა, მაშინ **C** კაცი მართალია;
- თუ **A** კაცი მართალია, მაშინ **B** კაცი მატყუარაა.

ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი დებულება გამომდინარეობს ამ წინადადებებიდან?

- ა) თუ **B** კაცი მატყუარაა, მაშინ **C** კაციც მატყუარაა;
- ბ) **C** კაცი მართალია, მაშინ **B** კაციც მართალია;
- გ) თუ **B** კაცი მართალია, მაშინ **C** კაციც მართალია;
- დ) არც ერთი პასუხი არ არის სწორი.

შეგვიძლია მოცემულობები ასე ჩავწეროთ: $\bar{A} \Rightarrow C$ და $A \Rightarrow \bar{B}$. მეორე იმპლიკაციიდან, ცნობილი თვისების თანახმად, $B \Rightarrow \bar{A}$. ახლა გამოვიყენოთ ტრანზიტულობა: $B \Rightarrow C$. დავასკვნით: თუ **B** კაცი მართალია, მაშინ **C** კაციც მართალია. პ ა ს უ ხ ი : გ).

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 12. ადგილობრივ არჩევნებზე ერთ-ერთ საარჩევნო ოლქში ერთმანეთს მეტოქეობას უწევდა ორი – **A** და **B** პარტია. **A** პარტიის წინასაარჩევნო პროგრამის მთავარი დებულება იყო საშუალო და უმაღლესი სკოლის პედაგოგთათვის სოციალური პირობების გაუმჯობესება, ხოლო **B** პარტიისა – კვალიფიციური მუშახელისთვის სამუშაო ადგილების შექმნა. გაიმარჯვა **B** პარტიამ. ანალიტიკოსებმა ეს იმით ახსნეს, რომ **A** პარტიამ არასწორად შეარჩია წინასაარჩევნო პროგრამის მთავარი დებულება.

ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი მატებს დამაჯერებლობას ანალიტიკოსთა მოსაზრებას?

- ა) არჩევნების დროს დაფიქსირდა მრავალი სერიოზული დარღვევა **B** პარტიის სასარგებლოდ;
- ბ) არჩევნების დროს არ დაფიქსირებულა სერიოზული დარღვევები რომელიმე პარტიის სასარგებლოდ;
- გ) ამ საარჩევნო ოლქის ტერიტორიაზე მოქმედებს მრავალი საგანმანათლებლო დაწესებულება;
- დ) ამ საარჩევნო ოლქში არჩევნებზე მოსვლა შეძლო მხოლოდ მეოთხედმა იმ ამომრჩევლებისა, რომლებიც **A** პარტიას უჭერენ მხარს.

მაგალითი. მოცემულია:

- ყველა ნიანგი ქვეწარმავალია,

- ნილოსში ცხოვრობენ ქვეწარმავლები.
მაშასადამე, ნილოსში ცხოვრობენ ნიანგები.

ეს დასკვნა:

- ა) გამომდინარეობს ერთობლივად ორივე წანამძღვრიდან;
- ბ) გამომდინარეობს თითოეული წანამძღვრიდან ცალ-ცალკე;
- გ) გამომდინარეობს მხოლოდ ერთ-ერთი წანამძღვრიდან;
- დ) არ გამომდინარეობს მოცემული წანამძღვრებიდან.

ტრანზიტულობის პირობები შესრულებული არ არის და მისი გამოყენება შეუძლებელია.

პასუხი: დ).

მაგალითი. მოცემულია:

- არ არსებობს დიდი საქმე დიდი დაბრკოლების გარეშე.

ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი წინადადება გადმოსცემს ზუსტად ამ აფორიზმის შინაარსს?

- ა) დიდი დაბრკოლება წინ ედობება მხოლოდ დიდ საქმეს;
- ბ) ვინც დიდ საქმეს არ აკეთებს, არც დიდ დაბრკოლებას აწყდება;
- გ) თუ ადამიანს ცხოვრებაში შეხვედრია დიდი დაბრკოლება, მას დიდი საქმე უკეთებია;
- დ) როდესაც ადამიანი დიდ საქმეს აკეთებს, მას აუცილებლად შეხვდება დიდი დაბრკოლება.

თუ ადამიანი დიდ საქმეს აკეთებს, მაშინ მას დიდი დაბრკოლება შეხვდება, რადგან მოცემულობით არ არსებობს დიდი საქმე დიდი დაბრკოლების გარეშე. პასუხი: დ).

მაგალითი. ტურისტული სააგენტო კლიენტებს სთავაზობდა დასვენებას დაახლოებით ერთნაირი ბუნებრივი პირობების მქონე ორ, A და B , კურორტზე. ის კლიენტები, რომელთა მატერიალური მდგომარეობა საშუალო ან საშუალოზე დაბალი იყო, ირჩევდნენ B კურორტს.

ექსპერტებმა ეს არჩევანი ახსნეს B კურორტზე სასტუმროებში ფასების სიმცირით.

ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი მატებს დამაჯერებლობას ექსპერტთა მოსაზრებას?

- ა) A კურორტზე სასტუმროებში სარემონტო სამუშაოები უფრო დიდი ხნის წინ ჩატარდა, ვიდრე B კურორტზე;
- ბ) B კურორტზე გაცილებით ხშირია ელექტრომომარაგების პრობლემები, ვიდრე A კურორტზე;
- გ) A კურორტზე გაცილებით ნაკლები გასართობი საშუალებებია, ვიდრე B კურორტზე;
- დ) B კურორტი განთქმულია მინერალური წყლებით, რომლებსაც მეტი სამკურნალო თვისებები აქვს, ვიდრე მინერალურ წყლებს A კურორტზე.

მიუხედავად იმისა, B კურორტზე უარესი ელექტრომომარაგებაა, მაინც მას ირჩევენ, თანაც საშუალო და დაბალი შემოსავლების მქონე ადამიანები. ამიტომ პასუხია ბ).

სავარჯიშო 13. მოცემულია:

- არსებობენ წიგნის მოყვარული ახალგაზრდები;
- წიგნის მოყვარულ ახალგაზრდათა უმრავლესობა ჰუმანიტარული ფაკულტეტის სტუდენტია.

ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი გამომდინარეობს ამ დებულებებიდან აუცილებლად?

- ა) ახალგაზრდების უმრავლესობა სწავლობს ჰუმანიტარულ ფაკულტეტზე;
- ბ) ჰუმანიტარულ ფაკულტეტზე მხოლოდ წიგნის მოყვარული ახალგაზრდები სწავლობენ;

- გ) წიგნის მოყვარული ახალგაზრდები მხოლოდ ჰუმანიტარულ ფაკულტეტზე სწავლობენ;
 დ) ზემოთ მოყვანილი პასუხებიდან არც ერთი.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ი 14. მაგიდაზე დევს ორი კოლოფი, თეთრი და ლურჯი. თეთრს აწერია: “ამ კოლოფში დევს შოკოლადი, ლურჯში – სათამაშო”. ლურჯს კი აქვს შემდეგი წარწერა: “ერთ-ერთ კოლოფში დევს შოკოლადი, მეორეში – სათამაშო”. ამ წარწერებიდან მხოლოდ ერთი შეესაბამება რეალობას.

რა დევს თითოეულ კოლოფში?

თეთრი კოლოფი	ლურჯი კოლოფი
ა) შოკოლადი	შოკოლადი
ბ) შოკოლადი	სათამაშო
გ) სათამაშო	შოკოლადი
დ) სათამაშო	სათამაშო.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ი 15. მოცემულია:

- A ფერმაში იმდენივე ძროხაა, რამდენიც B ფერმაში;
- A ფერმაში ძროხების უმრავლესობა შავი ფერისაა, ხოლო B ფერმაში ძროხების უმრავლესობა თეთრია;
- A ფერმაში ყოველდღიურად იღებენ მეტ რძეს, ვიდრე B ფერმაში.

ამის საფუძველზე ფერმერებმა ივარაუდეს, რომ შავი ძროხა იძლევა მეტ რძეს, ვიდრე თეთრი.

ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი დებულება განამტკიცებს ფერმერთა ვარაუდს?

- ა) B ფერმაში მოწველილი რძის რაოდენობა შავი ძროხების მომრავლებამდე უფრო ნაკლები იყო, ვიდრე მათი მომრავლების შემდეგ;
- ბ) B ფერმაში ნაკლებად ითვალისწინებენ მეცხოველეობის თანამედროვე მიღწევებს, ვიდრე A ფერმაში;
- გ) A ფერმაში მომუშავე პერსონალის რაოდენობა გაცილებით მეტია, ვიდრე B ფერმაში მომუშავეთა რაოდენობა;
- დ) A ფერმაში ძროხებს აძლევენ სპეციალურ საკვებს, რომელიც ზრდის წველადობას.

სავარჯიშოების პასუხები

1. პასუხია დ), რადგან სრულიად არასაკმარისია ის, რომ ჟიურიმ დაადგინოს ქურციკის გადარჩენის პერსპექტივა. დანარჩენი პასუხები შეიძლება იყოს ჭეშმარიტი (თუმცა სავალდებულოც არ არის).
2. პასუხია ბ). ეს წინადადება მოცემულის ტოლფასია, რადგან წარმოადგენს მოცემული ჭეშმარიტი წინადადების ორმად უარყოფას.
3. პასუხია გ). მოცემული წინადადებისაგან ორმაგი უარყოფით სწორედ ის მიიღება.
4. პასუხია გ), რადგან პირობით ავსტრალიაში მცხოვრებ ხერხემლიან ცხოველებს იქ მცხოვრები მგელიც მიეკუთვნება, ამასთან მას ბეწვი გააჩნია.

5. პასუხია დ). გამომდინარეობს მხოლოდ პირველი დებულებიდან.

6. პასუხია ა). ტრანზიტულობის თვისების გამოყენებით მივიღებთ, რომ ცირკის ზოგიერთ თამანშრომელს არ აქვს სიმაღლის შიში. რაც აკმაყოფილებს მოთხოვნას.

7. პირობის თანახმად, წელს ისინი სოფელს აღარ აირჩევენ. სამთო კურორტს ვერ აირჩევენ, რადგან, პირობის თანახმად, მის არჩევას მოჰყვებოდა ზღვის არჩევაც. ეს კი ეწინააღმდეგება ერთ-ერთ პირობას. მაშასადამე აირჩევენ ზღვას და არ აირჩევენ სამთო კურორტს და სოფელს. პასუხი: ა).

8. საზოგადოდ, მოსალოდნელია, რომ კალათბურთელები უფრო მაღლები უნდა იყვნენ, ვიდრე მორბენლები. შესაბამისად, უნდა ავირჩიოთ პასუხი: დ).

9. ყავის ამ სახეობის მომხმარებელთა რაოდენობის ზრდამ შეიძლება გამოიწვიოს მისი დეფიციტი. ამიტომ ამან შეიძლება დააყენოს ექვექცეშ გამოთქმული მოსაზრება. პასუხი: ბ).

10. მოცემულობაში არ არის ნათქვამი, რომ ყველა რუსი მოციგურავე გამოდიოდა ჩაიკოვსკის მუსიკის თანხლებით. შეიძლება რომელიმე მათგანი სხვა მუსიკის თანხლებით გამოვიდა. ამიტომ პასუხია: გ).

11. პირველი პირობიდან გამოდის, რომ ერთმანეთის მიმდევრობით არიან ყვითელი, წითელი და ვარდისფერი ყვავილები. ბოლო პირობის გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ ყვავილების ფერების განლაგებაა:

თეთრი, ყვითელი, წითელი, ვარდისფერი.

მეორე პირობით და სხვა პირობებით თანდათანობით მივიღებთ ასეთ განაწილებას:

თეთრი,	ყვითელი,	წითელი,	ვარდისფერი
ჰორტენზია,	სუმბული,	ვარდი,	ტიტა

12. პასუხია ბ), რადგან არჩევნებმა დარღვევების გარეშე ჩაიარა, ანუ ნაჩვენები იქნა ობიექტური სურათი. ამ სურათს კი წინასაარჩევნო დებულებები განსაზღვრავს.

13. წიგნის მოყვარულ ახალგაზრდათა უმრავლესობა (შეიძლება ყველა არა, მაგრამ ყველა მათგანი წიგნის მოყვარულია) არის ჰუმანიტარული ფაკულტეტის სტუდენტი. შესაბამისად, ამ ფაკულტეტზე წიგნის მოყვარული ახალგაზრდები სწავლობენ. პასუხი: ბ).

14. თუ სწორია პირველ კოლოფზე გაკეთებული წარწერა, მაშინ სწორი გამოდის, აგრეთვე მეორე კოლოფზე გაკეთებული წარწერაც. ეს ეწინააღმდეგება იმას, რომ მხოლოდ ერთი წარწერაა სწორი. მაშასადამე სწორი უნდა იყოს მეორე კოლოფის წარწერა და არასწორი უნდა იყოს პირველი კოლოფის წარწერა. პასუხი: გ).

15. B ფერმაში შავი ძროხების გამრავლებას მოჰყვა რძის ნამატიც. ეს კიდევ ერთი ნიშანია იმისა, რომ შავი ძროხები მეტს იწველებიან, ვიდრე თეთრი ძროხები. პასუხი: ა).

III. სამომხმარებლო არითმეტიკა. ელემენტარული მათემატიკა საბანკო საქმეში.

რიცხვის პროცენტი

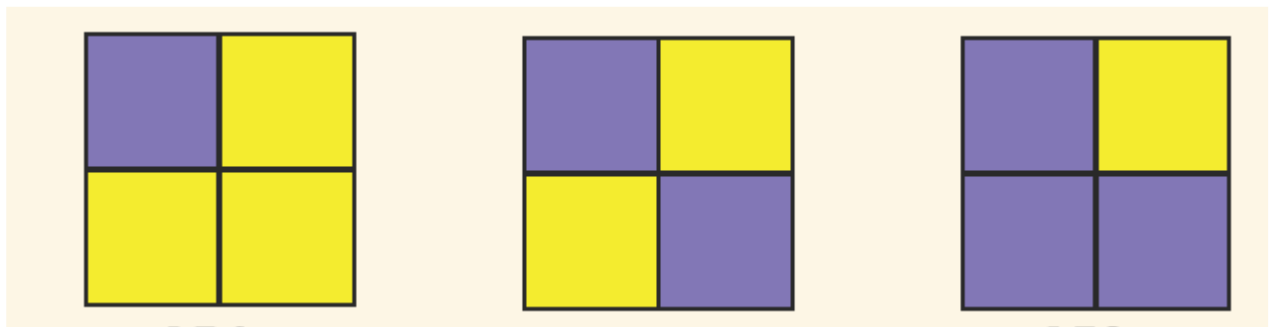
ყოველდღიურ ცხოვრებაში ხშირად გვჭირდება სხვადასხვა სიდიდის მეასედ ნაწილზე საუბარი ან მათზე მოქმედებები. თეთრი ლარის მეასედი ნაწილია, სანტიმეტრი ასევე მეასედი

ნაწილია მეტრის, ფართობის ერთეული კვადრატული მეტრი სხვა, ასევე ძალიან გავრცელებული ფართობის ერთეულის - არის მეასედი ნაწილია. ალბათ ამან განაპირობა, რომ მეასედი ნაწილის აღსანიშნად სპეციალური სიტყვა შემოიღეს - “პროცენტი”. ეს სიტყვა ლათინური წარმომავლობისაა და ნიშნავს სწორედ მეასედს. (შეიძლება ისტორიიდან თქვენთვის ცნობილია კიდევ, რომ ძველ რომში 100-100 კაციანი სამხედრო ლეგიონები ჰყავდათ, რომლებსაც “ცენტურიებს” უწოდებდნენ, მათ მეთაურს კი “ცენტურიონი” ერქვა. დოლარის მეასედ ნაწილ “ცენტი” ქვია. ამ სიტყვების ფუძეც იგივე ლათინური სიტყვისგანაა მიღებული). მოკლედ: **რაიმეს ერთ მეასედ ნაწილს პროცენტი ეწოდება**. პროცენტის აღსანიშნად ხმარობენ ამგვარ სიმბოლოს: $\%$. თუ მაღაზიების ვიტრინაზე არის წარწერა - “ფასდაკლება 20%-ით”. ეს ნიშნავს, რომ მაღაზიაში სადღესასწაულოდ, ან სხვა რაიმე მიზეზით საქონლის დიდი ნაწილი იყიდება პირველად ფასზე იაფად, ამასთან

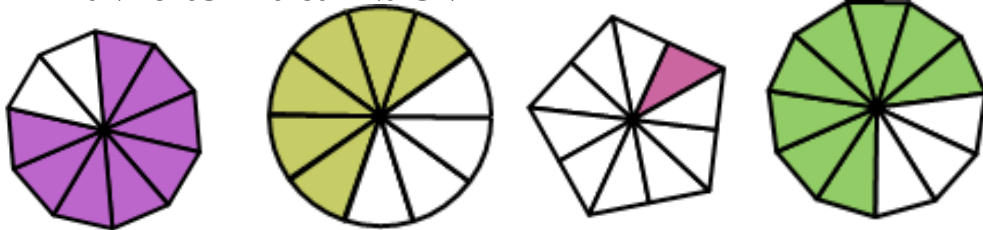
ფასდაკლება შეადგენს საწყისი ღირებულების $\frac{20}{100}$ ნაწილს.

პროცენტის ცნების არსის გაგების მიზნით, სასურველია, ამგვარი დავალებების გარჩევა:

- რამდენი პროცენტია $\frac{25}{100}$, $\frac{60}{100}$, $\frac{5}{100}$?
- გამოსახეთ წილადის და ათწილადის სახით: 30%, 45%, 100%.
- იპოვეთ 50-ის 10%, 20%, 25%.
- დახაზეთ კვადრატი, რომლის გვერდი 10 უჯრის ტოლია. გააფერადეთ კვადრატის 40%.
- რომელ ფიგურაზეა იასამნისფრად გაფერადებული ამ ფიგურის 75%?



- რომელი ფიგურაა გაფერადებული 80%-ით?



- ჩაწერეთ წილადები პროცენტის სახით: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$.
- რიცხვის რამდენ პროცენტს შეადგენს მისი ნახევარი? მეათედი? მეოთხედი?
- სკოლის მოსწავლეთა 55% ვაჟია. რამდენ პროცენტს შეადგენენ გოგონები?
- ბიბლიოთეკაში წიგნების 70% ქართულია. რამდენ პროცენტს შეადგენს უცხოენოვანი წიგნები?

პროცენტთან დაკავშირებით, ძირითადად განიხილავენ სამი სახის ამოცანას.

ა) მოცემულია a რიცხვი და უნდა ვიპოვოთ მისი p პროცენტი. რიცხვის 1% იქნება $\frac{a}{100}$, ხოლო $p\%$, ცხადია, $p \cdot \frac{a}{100} = \frac{ap}{100}$.

ამოცანა: ზანკის ადმინისტრაცია პრემიით აჯილდოვებს თანამშრომლების 15%-ს. რამდენი ადამიანი მიიღებს პრემიას, თუ თანამშრომელთა საერთო რაოდენობაა 120?

ამოხსნა: 120-ის 1% არის $\frac{12}{100}$. 15% იქნება $\frac{12 \cdot 15}{100} = \frac{180}{100} = 1.8$. ანუ, პრემიას მიიღებს 18 ადამიანი.

ამოცანა: vaSli gaSrobis dros kargavs Tavisi wonis 84%-s. ramden კილოგრამ ჩირს მივიღებთ 160 კგ ვაშლისგან?

ამოხსნა: რადგან ვაშლის წონა გამოშრობისას მცირდება 84%-ით, ეს ნიშნავს, რომ ჩირის წონა შეადგენს თავდაპირველად აღებული ვაშლის წონის 16%-ს ($100\% - 84\% = 16\%$). 160-ის 16% კი არის $\frac{160 \cdot 16}{100} = 25.6$ კგ. ე.ი. 160 კილოგრამი ვაშლისგან მიიღება 25.6 კილოგრამი ჩირი.

ბ) ვიპოვოთ a რიცხვი, თუ მისი p პროცენტი არის b . ამგვარი ამოცანების ნიმუშებია:

ამოცანა: qsovilis fasma daiklo 30%-iT, რაც, რეალურად, 18 ლარია. ramdeni lari Rirda qsovili გაიაფებამდე?

ამოხსნა: ქსოვილის თავდაპირველი ღირებულება აღვნიშნოთ x -ით. ამ ღირებულების 30% იქნება $x \cdot \frac{30}{100}$, რაც, პირობის თანახმად, 18-ის ტოლია. შევადგინოთ განტოლება:

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{30}{100} &= 18 \\ x &= \frac{18 \cdot 100}{30} \\ x &= 60 \end{aligned}$$

ანუ, ქსოვილის თავდაპირველი ღირებულება ყოფილა 60 ლარი.

ამოცანა: vaSli gaSrobis dros kargavs Tavisi wonis 84%-s. ramdeni kg vaSli unda aviRoT, rom miviRoT 16 kg Ciri?

ამოხსნა: დავიწყოთ იმით, რომ რადგან ვაშლის წონა გამოშრობისას მცირდება 84%-ით, ეს ნიშნავს, რომ ჩირის წონა შეადგენს თავდაპირველად აღებული ვაშლის წონის 16%-ს ($100\% - 84\% = 16\%$). შემდგომი ეტაპიდან გამოვიყენოთ ამოცანის განტოლებით ამოხსნის ხერხი. ვთვათ, საძიებელი უცნობი სიდიდეა x . მაშინ მისი 16% იქნება $x \cdot \frac{16}{100}$, რაც პირობის თანახმად, შეადგენს 16 კილოგრამს. მივიღეთ განტოლება:

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{16}{100} &= 16 \\ x &= 16 \div \frac{16}{100} \\ x &= 100 \end{aligned}$$

ე.ი. იმისათვის, რომ მივიღოთ 16 კილოგრამი ჩირი, საჭიროა 100 კილოგრამი ვაშლის აღება.

გ) a რიცხვის რამდენი პროცენტია b რიცხვი.

ამოცანა: მილიონიან ქალაქში 20 000 სტუდენტია. ამ ქალაქის მოსახლეობის რამდენ პროცენტს შეადგენენ სტუდენტები?

ამოხსნა: ამჯერადაც გამოვიყენოთ განტოლების შედგენის ხერხი და საძიებელი სიდიდე, ანუ, უცნობი, რიცხვი, რომელიც აღნიშნავს სტუდენტთა პროცენტულ მაჩვენებელს ქალაქის მთლიანი მოსახლეობის მიმართ, აღვნიშნოთ x -ით. თუ სტუდენტები შეადგენენ ქალაქის მოსახლეობის x პროცენტს, მაშასადამე მათი წილი, გამოსახული ნაწილებში იქნება $\frac{x}{100}$. ამოცანის პირობის გათვალისწინებით,

$$1\,000\,000 \cdot \frac{x}{100} = 20\,000$$

$$x = 2$$

მივიღეთ, რომ სტუდენტები შეადგენენ ქალაქის მაცხოვრებელთა საერთო რაოდენობის 2%-ს.

ხშირად გვხვდება ამოცანები, როცა რაიმე სიდიდე ჯერ იცვლება p_1 პროცენტით, შემდეგ კი p_2 პროცენტით და გვანტერესებს, თუ რამდენი პროცენტით შეიცვალა საწყისი სიდიდე.

ასეთი ტიპის ამოცანები მარტივად იხსნება შემდეგი ფორმულის გამოყენებით:

$$p = p_1 + p_2 + \frac{p_1 \cdot p_2}{100},$$

სადაც p არის საწყისი სიდიდის ცვლილება პროცენტებში. ამასთანავე, ფორმულაში იგულისხმება, რომ სიდიდის გაზრდის ან შემცირების დროს შესაბამისი პროცენტული რაოდენობა ან დადებითია (ზრდის შემთხვევაში) ან უარყოფითი (შემცირების დროს).

ამოცანა: ბენზინის ფასი იანვარში წინა თვესთან შედარებით გაიზარდა 20%-ით, ხოლო თებერვალში - შემცირდა 10%-ით. რამდენი პროცენტით შეიცვალა ბენზინის თავდაპირველი ფასი?

ამოხსნა: ამოცანის პირობიდან ცნობილია, რომ $p_1 = 20\%$, ხოლო $p_2 = -10\%$.

თუ გამოვიყენებთ ზემოთ მოყვანილ ფორმულას, მივიღებთ:

$$p = 20 + (-10) + \frac{20 \cdot (-10)}{100} = 10 - 2 = 8.$$

მაშასადამე, ბენზინის თავდაპირველი ფასი, მისი 2-ჯერ ცვლილების შედეგად გაიზარდა 8%-ით.

ამოცანები პრაქტიკული მუშაობისათვის:

1. ბანკი სახლის აშენებისათვის მომხმარებელს სთავაზობს სახლის ღირებულების 80%-ის ტოლ სესხს. რა ოდენობის სესხს მიიღებს მომხმარებელი, თუ მას სურს აიშენოს 75 000 დოლარის ღირებულების სახლი? (პასუხი: 60 000 დოლარი).
2. 2015 წელს ბანკის კლიენტთა რაოდენობა იყო 5 000, ხოლო 2016 წელს მათი რაოდენობა წინა წელთან შედარებით გაიზარდა 30%-ით. რამდენი კლიენტი ყავდა ბანკს 2016 წელს? (პასუხი: 6500).
3. ატმის ფასი ჯერ გაიზარდა 15%-ით, ხოლო შემდეგ კიდევ 10%-ით. რამდენი პროცენტით გაიზარდა ატმის თავდაპირველი ფასი? (პასუხი: 26.5%-ით).

4. ხელოსნის ხელფასი ჯერ გაიზარდა 10%-ით, ხოლო შემდეგ შემცირდა კვლავ 10%-ით. რამდენი პროცენტით შიცვალა ხელოსნის თავდაპირველი ხელფასი? (პასუხი: შემცირდა 1%-ით).
5. კომპანია მყიდველს, ნივთის შეძენისას სთავაზობს საგარანტიო მომსახურებას, რომელიც გულისხმობს შეძენილი ნივთის ახლით შეცვლას, თუ ნივთი დაზიანდა 1 წლის განმავლობაში. რომ 1 წლის განმავლობაში კომპანიამ გაყიდა 300 ერთეული თითოეული 180 ლარად. ცნობილია, რომ აქედან დაზიანდა 6%. რისი ტოლია კომპანიის შემოსავალი? (პასუხი: 50 760)
6. მუსიკალური ცენტრის ფასს მოემატა თავისი ფასის მეხუთედი. რამდენი პროცენტით გაძვირდა მუსიკალური ცენტრი? (პასუხი: 20%-ით)
7. ვაშლი გაძვირდა 25%-ით. რამდენჯერ ძვირია ახლა იგი საწყის ფასთან შედარებით? (პასუხი: 1.25-ჯერ)
8. ქალაქის მოსახლეობა 1 წლის განმავლობაში 10% - ით გაიზარდა და შეადგინა 120 000 მაცხოვრებელი. თუ X -ით აღვნიშნავთ მოსახლეობის რაოდენობას გაზრდამდე, რომელი განტოლებით შეიძლება დადგინდეს ქალაქის მოსახლეობის 1 წლის

წინანდელი X რაოდენობა? (პასუხი: $X + \frac{X}{10} = 120000$)

სარგებლის ერთჯერადი და მრავალჯერადი დარიცხვა. სარგებელი მარტივი განაკვეთით

თავდაპირველად, გავეცნოთ საბანკო ტერმინოლოგიას. როგორც ცნობილია, ბანკი არის ეკონომიკური ინსტიტუტი (ორგანიზაცია), რომლის ძირითადი ფუნქციებია: ფულადი ანგარიშსწორება, კრედიტის გაცემა, ფულადი სახსრების თავმოყრა და სხვა. საფინანსო ოპერაციების დროს ერთი მხარე მოგების ან სარგებლის მიზნით მეორე მხარეს აძლევს სესხს (კრედიტს). იმ მხარეს, რომელმაც ფული გაასესხა (ანუ, კრედიტი გასცა) კრედიტორი ანუ მევალე ეწოდება. იმ მხარეს, ვინც ფული ისესხა (კრედიტი აიღო) - დებიტორი ანუ მოვალე. მევალეს (კრედიტორი) და მოვალეს(დებიტორი) შორის, როგორც წესი ფორმდება ხელშეკრულება, რომელშიც მოცემულია სესხის (კრედიტის) ოდენობა, მისი დაბრუნების ვადა, სარგებლის ოდენობა, მისი დარიცხვის პერიოდი, დარიცხვის ფორმები და სხვა.

ბანკში შესანახად შეტანილ ფულად სახსრებს, რომელსაც ჩვეულებისამებრ, სარგებელი ერიცხება, ანაბარი (დეპოზიტი) ეწოდება. ლათინურად depositum ნიშნავს შესანახად მოცემულ რამეს.

არსებობს სესხებზე (კრედიტებზე) სარგებლის დარიცხვის სხვადასხვა ფორმა. მაგალითად, სესხები ერთჯერადი და მრავალჯერადი დარიცხვით. დარიცხული თანხის ოდენობას, გამოსახულს პროცენტებში, **სარგებლის განაკვეთს** უწოდებენ. სარგებლის განაკვეთის მეასედ ნაწილს საპროცენტო განაკვეთი ეწოდება.

ჯერ გავეცნოთ სესხებს ერთჯერადი დარიცხვით, ხოლო შემდეგ განვიხილოთ სესხები მრავალჯერადი დარიცხვით.

სესხი ერთჯერადი დარიცხით სარგებლის p % განაკვეთით ნიშნავს, რომ მოვალემ დადგენილი ვადის გასვლის შემდეგ მევალეს უნდა დაუბრუნოს p %-ით გაზრდილი

თანხა. ე.ი. თუ მოვალემ სესხად აიღო S ოდენობის თანხა, მაშინ მან მევალეს უნდა დაუბრუნოს S^* ოდენობის თანხა, სადაც

$$S^* = S + \frac{Sp}{100}. \quad (1)$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ სესხი გაცემულია ერთჯერადი დარიცხვით სარგებლის $p\%$ -იანი განაკვეთით.

განვიხილოთ ამოცანა: ბანკმა გასცა 5000 ლარის ოდენობის სესხი სარგებლის 2% -იანი განაკვეთით. ერთჯერადი დარიცხვის პირობით, რა ოდენობის თანხა უნდა დააბრუნოს მოვალემ ბანკში დადგენილი ვადის გასვლის შემდეგ?

ამოხსნა: პირობის თანახმად, $S=5000$, $p=2\%$ და უნდა ვიპოვოთ S^* . ჯერ ვიპოვოთ სარგებელი, ანუ 5000 -ის 2% , ხოლო შემდეგ დასაბრუნებელი თანხა. 5000-ის 2% არის 100. ამიტომ, (1) ფორმულის თანახმად $S^*=5000+100=5100$. პასუხი: დასაბრუნებელია 5100 ლარი.

სესხი მრავალჯერადი დარიცხვით ნიშნავს, რომ სესხის ვადის განმავლობაში სარგებლის დარიცხვები ხდება დროის გარკვეული ინტერვალების გასვლის შემდეგ. როგორც წესი, ეს ინტერვალები კონკრეტული სესხისთვის ერთი და იგივეა. დროის იმ პერიოდს, რომლის ბოლოს ხდება სარგებლის დარიცხვა, **დარიცხვის პერიოდი** ეწოდება. დარიცხვის პერიოდი შეიძლება იყოს წელი, კვარტალი, თვე, დღე. ამასთანავე, არსებობს სარგებლის დარიცხვის რამდენიმე წესი. ძირითადი განსხვავება ამ წესებს შორის არის ის, თუ რომელი თანხიდან იანგარიშება სარგებლის განაკვეთი. კერძოდ, თუ სესხის მთელი ვადის განმავლობაში დასარიცხი სარგებელი $p\%$ -იანი განაკვეთით იანგარიშება კრედიტის საწყისი თანხიდან, მაშინ საქმე გვაქვს სარგებლის მარტივ განაკვეთთან. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ კრედიტი გაცემულია **სარგებლის $p\%$ -იანი მარტივი განაკვეთით**.

თუ სესხის მთელი ვადის განმავლობაში დასარიცხი სარგებელი $p\%$ -იანი განაკვეთით იანგარიშება კრედიტის მიმდინარე თვიდან, მაშინ საქმე გვაქვს სარგებლის რთულ განაკვეთთან. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ კრედიტი გაცემულია **სარგებლის $p\%$ -იანი რთული განაკვეთით**.

თემის უკეთ გასაგებად და ამოცანების ამოხსნის გაადვილების მიზნით საჭიროა ალგებრაში წინა წლებში შესწავლილი საკითხის - **არიტმეტიკული პროგრესიის** გამეორება.

რიცხვთა მიმდევრობას $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, რომლის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორედან, მიიღება წინა წევრზე ერთი და იმავე d რიცხვის დამატებით, **არიტმეტიკული პროგრესია** ეწოდება. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ რიცხვებს ეწოდებათ **არიტმეტიკული პროგრესიის წევრები**. D რიცხვს ეწოდება **არიტმეტიკული პროგრესიის სხვაობა**. ცხადია, რომ $d = a_{k+1} - a_k$, სადაც $k=1, 2, 3, \dots, n-1$.

არიტმეტიკული პროგრესიის k -ური წევრი გამოითვლება ფორმულით:

$$a_k = a_1 + d(k - 1), \quad (2)$$

სადაც $k=1, 2, 3, \dots, n$.

პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ გამოითვლება ფორმულით:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ ან } S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \quad (3).$$

IV. ამოცანები ხსნარებზე - რიცხვის პროცენტის გამოყენების კიდევ ერთი არეალი

ხსნარებთან დაკავშირებული ზოგიერთი ამოცანა

ხსნარების კონცენტრაციებთან დაკავშირებული ამოცანები, ხშირად სირთულეებს წარმოქმნის. ძნელია მივუთითოთ ამის მთავარი ფაქტორი. შესაძლებელია ეს იყოს გამოუცდლობის, ან ამოცანის უჩვეულო ფორმით გადმოცემის შედეგი. ცხადია ასეთი ტიპის ამოცანების სხვადასხვა ვარიაციების გარჩევა, საშუალებას მოგვცემს უკეთ გავერკვეთ სპეციფიკაში და დავძლიოთ “ხსნარებთან” დაკავშირებული სირთულის კომპლექსი.

განვიხილოთ კონცენტრაციებთან დაკავშირებული რამოდენიმე სტანდარტული ტიპის ამოცანა. ასეთი ამოცანა შეიძლება წილებში ან პროცენტებში იყოს ფორმულირებული. ჩვენ მოგვყავს ამოცანების პირდაპირი მეთოდებით ამოხსნები. ამ მეთოდს ყოველთვის მივყავართ პასუხამდე. თუმცა გამოცდილი და დაკვირვებული მკითხველი აღმოაჩენს, რომ კრეატიულობის გამოჩენის შემთხვევაში ხშირად ამოხსნები შეიძლება გამარტივდეს და შემოკლდეს. ეს საშუალება დაინტერესებული მკითხველისათვის დავტოვოთ.

ამოცანა 1. რამდენი მტკნარი წყალი უნდა დავამატოთ 6%-იან 50 კგ მარილმჟავას, რომ მარილის კონცენტრაციამ 2,5% შეადგინოს?

ამოხსნა. მოცემული რაოდენობის მარილმჟავა შეიცავს $\frac{50 \cdot 6}{100} = 3$ კგ. მარილს. იგივე რაოდენობის მარილს შეიცავს მარილმჟავას 2,5%-იანი ხსნარიც. ასე, რომ ასეთი ხსნარი $\frac{3 \cdot 100}{2,5} = 120$ კგ-ს იწონის. დამატებული მტკნარი წყლის რაოდენობაა: $120 - 50 = 70$ კგ. პასუხი: 70 კგ.

ამოცანა 2. ხსნარი შეიცავს 60 გ მარილს. მას შემდეგ რაც ხსნარს დაუმატეს 300 გ. წყალი, მარილის კონცენტრაცია შემცირდა 10%-ით. ვიპოვოთ ხსნარის თავდაპირველი კონცენტრაცია და წყლის რაოდენობა.

ამოხსნა. ვთქვათ თავიდან ხსნარი შეიცავდა x გ. წყალს. მარილის კონცენტრაცია იქნებოდა $\frac{6000}{60+x} \%$. წყლის დამატების შემდეგ კონცენტრაცია იქნებოდა $\frac{6000}{360+x} \%$. პირობის თანახმად,

$$\frac{6000}{60+x} - \frac{6000}{360+x} = 10.$$

აქედან მივიღებთ $x = 240$ გ. პასუხი: წყლის რაოდენობა თავიდან იყო 240 გ, ხოლო მარილის კონცენტრაცია იყო 20%.

ამოცანა 3. ჭურჭელში 30 ლ მარილმჟავაა. ჭურჭლიდან გადმოსახეს რაღაც რაოდენობა მარილმჟავა და წყლით შეავსეს. შემდეგ გადმოსახეს ორჯერ მეტი რაოდენობის წარევი, ვიდრე პირველ ჯერზე და კვლავ წყლით შეავსეს. ამის შემდეგ ჭურჭელში დარჩა $22\frac{2}{9}\%$ -იანი ხსნარი. რამდენი ლიტრი სითხე გადმოსახეს პირველ ჯერზე?

ამოხსნა. ვთქვათ თავიდან x ლ მარილმჟავა გადმოსახეს. ამის შედეგად ჭურჭელში გვექნებოდა თავდაპირველი ხსნარის $30 - x$ ლ და x ლ წყალი. მეორე ჯერზე გადმოსახეს $2x$ ლ

ნარევი. ამ რაოდენობას გადმოყვებოდა $\frac{2x(30-x)}{30}$ ლ სუფთა მარილმჟავა. წყლით შევსების შემდეგ, მარილმჟავა პირობის თანახმად $22\frac{2}{9}\%$ -იან ხსნარს შეადგენს. ამიტომ დავწერთ

$$\frac{30-x-\frac{2x(30-x)}{30}}{30} \cdot 100 = 22\frac{2}{9}$$

ამ განტოლების ამონახსნია $x = 10$. პასუხი: 10 ლ.

ამოცანა 4. ვთქვათ გვაქვს მარილმჟავას ორი ხსნარი. თუ პირველი ხსნარის 3 კგ შევურევთ მეორე ხსნარის 4 კგ და დავუმატებთ 1 კგ მარილს, მივიღებთ მარილმჟავას ხსნარს კონცენტრაციით $\frac{3}{10}$. თუ პირველი ხსნარის 4 კგ-ს შევურევთ მეორე ხსნარის 1 კგ-ს და 2 კგ სუფთა წყალს დავუმატებთ, მივიღებთ მარილმჟავას ხსნარს $\frac{4}{15}$ კონცენტრაციით. ვიპოვოთ მარილმჟავას კონცენტრაცია ორივე ხსნარში თავიდან.

ამოხსნა. ვთქვათ x და y აღნიშნავს მარილმჟავას კონცენტრაციას პირველ და მეორე ხსნარში შესაბამისად. პირველი ხსნარის 3 კგ შეიცავს $3x$ კგ სუფთა მარილს, ხოლო მეორე ხსნარის 4 კგ შეიცავს $4y$ კგ სუფთა მარილს. ამიტომ პირველი პირობიდან დავწერთ

$$\frac{3x+4y+1}{3+4+1} = \frac{3}{10}. \quad (1)$$

ანალოგიური მსჯელობით, ამოცანის მეორე პირობიდან, ვწერთ

$$\frac{4x+y}{4+1+2} = \frac{4}{15}. \quad (2)$$

მივიღეთ (1)-(2) სისტემა. მისი ამონახსნია $x = \frac{7}{15}$, $y = 0$. პასუხი: პირველი ხსნარის კონცენტრაციაა $\frac{7}{15}$, ხოლო მეორე წარმოადგენს სუფთა წყალს.

ამოცანა 5. 10 კგ-იანი შენადნობი 60% თუთიას შეიცავს. ის გადაადნეს და შეურიეს 4 კგ-იან და 6 კგ-იან სხვა კონცენტრაციის შენადნობებთან და მიიღეს 40%-იანი შენადნობი. თუ 4 კგ-იან შენადნობში იქნებოდა თუთიის ისეთი პროცენტული შემადგენლობა, როგორიც იყო 6 კგ-იან შენადნობში, მაშინ მათი გადადნობით 8 კგ-იან შენადნობთან, რომელიც 70 % თუთიას შეიცავს, მოგვემდგა 45%-იან შენადნობს. ვიპოვოთ თუთიის პროცენტული შემადგენლობა თავიდან მოცემულ 4 კგ-იან და 6 კგ-იან შენადნობებში.

ამოხსნა. ვთქვათ p და q აღნიშნავს 4 კგ-იან და 6 კგ-იან შენადნობებში თუთიის პროცენტულ შემადგენლობას შესაბამისად. პირველი შენადნობისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{6+\frac{4p}{100}+\frac{6q}{100}}{10+4+6} \cdot 100 = 40. \quad (3)$$

ასეთივე მსჯელობით მეორე პირობა ასეთ ტოლობას მოგვცემს

$$\frac{5.6+\frac{4q}{100}+\frac{6p}{100}}{8+4+6} \cdot 100 = 45. \quad (4)$$

მივიღეთ (3)-(4) სისტემა. მისი ამონახსნია $p = 35$, $q = 10$. პასუხი: 4 კგ-იანი შენადნობი შეიცავს 35% თუთიას, 6 კგ-იანი კი 10% თუთიას.

ამოცანა 6. გვაქვს სპილენძისა და კალის ორი შენადნობი. პირველში ამ მეტალების რაოდენობა ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 5:3, ხოლო მეორეში ანალოგიური შეფარდებაა 3:4. უნდა ავიღოთ თითოეული შენადნობების რაღაც რაოდენობები ისე რომ, მივიღოთ 22 გ ახალი შენადნობი, რომელშიც სპილენძისა და კალის რაოდენობები შეეფარდებოდეს ერთმანეთს, როგორც 3:2. როგორ მოვახერხოთ ეს?

ამოხსნა. ვთქვათ უნდა ავიღოთ პირველი შენადნობის x გ და მეორე შენადნობის $(22-x)$ გ. პირველი შენადნობიდან $\frac{5x}{8}$ გ სპილენძია, ხოლო $\frac{3x}{8}$ გ კალაა. მეორე ნაჭერში $\frac{3(22-x)}{7}$ გ სპილენძია და $\frac{4(22-x)}{7}$ გ კალაა. ასე, რომ ახალ შენადნობში სულ $\frac{5x}{8} + \frac{3(22-x)}{7} = \frac{11x+528}{56}$ გ სპილენძია და $\frac{3x}{8} + \frac{4(22-x)}{7} = \frac{704-11x}{56}$ კალაა. ისინი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:2. ამიტომ

$$\frac{11x+528}{56} : \frac{704-11x}{56} = 3:2.$$

აქედან ვღებულობთ $x = 19,2$ გ. პასუხი: უნდა ავიღოთ პირველი შენადნობის 19,2 გ და მეორე შენადნობის 2,8 გ.

ამოცანა 7. გვაქვს სამი შენადნობი. პირველი შენადნობის წონაა 8 კგ და შეიცავს 3 კგ სპილენძს, მეორის წონაა 5 კგ და შეიცავს 40% სპილენძს. პირველი და მესამე შენადნობების გადანობით მიიღება 50% სპილენძის შემცველი შენადნობი, ხოლო მეორე და მესამე შენადნობების გადანობით მიიღება $53\frac{1}{3}\%$ სპილენძის შემცველი შენადნობი. უნდა ვიპოვოთ მესამე შენადნობის წონა და სპილენძის შემცველობის პროცენტი.

ამოხსნა. ვთქვათ მესამე შენადნობის წონაა x კგ და შეიცავს $p\%$ სპილენძს. პირველ შენადნობთან ერთად ახალი შენადნობის წონა იქნება $x + 8$ კგ და შეიცავს $3 + \frac{xp}{100}$ კგ სპილენძს. ამიტომ ვწერთ

$$\frac{50(x+8)}{100} = 3 + \frac{xp}{100}. \quad (5)$$

მეორე და მესამე შენადნობების საერთო წონაა $x + 5$ და შეიცავს $2 + \frac{xp}{100}$ კგ სპილენძს. პირობის თანახმად,

$$\frac{53\frac{1}{3}(x+5)}{100} = 2 + \frac{xp}{100}. \quad (6)$$

მივიღეთ (5)–(6) სისტემა. მისი ამონახსნია $x = 10, p = 60\%$.

ამოცანა 8. ერთმანეთში შეურიეს 30%-იანი და 10%-იანი მარილწყალი და მიიღეს 600 გ 15%-იანი ხსნარი. რამდენი გრამი მარილწყალი აიღეს თითოეული ხსნარიდან?

ამოხსნა. ვთქვათ პირველი ხსნარიდან აიღეს a გ და მეორედან $600 - a$ გ. პირველი ნაწილი შეიცავს $\frac{30a}{100} = \frac{3a}{10}$ გ მარილს, ხოლო მეორე $\frac{(600-a)10}{100} = \frac{600-a}{10}$ გ მარილს. პირობის თანახმად, 600 გ შეიცავს 15% მარილს, ანუ 90 გ მარილს. ამიტომ გვექნება განტოლება

$$\frac{3a}{10} + \frac{600-a}{10} = 90.$$

მისი ამონახსნია $a = 150$. პასუხი: აუღიათ პირველი ხსნარის 150 გ და მეორე ხსნარის 450 გ.

ამოცანა 9. ხსნარი შედგება სამი კომპონენტისაგან A, B და C -საგან. თუ ამ ხსნარის 20 გ-ს ავურევთ A -ს 2 გრამთან, მივიღებთ ხსნარს, რომელშიც A და B -ს მასები ტოლი იქნება. თუკი ამ ხსნარის 30 გ-ს ავურევთ C -ს 9 გრამთან, მივიღებთ ხსნარს, რომელშიც A და C -ს მასები ტოლი იქნება. ვიპოვოთ თავდაპირველი ხსნარის პროცენტული შემადგენლობა.

ამოხსნა. ვთქვათ თავიდან ხსნარი შეიცავს A, B და C კომპონენტებს p, q და r პროცენტებს შესაბამისად. ცხადია

$$p + q + r = 100. \quad (7)$$

20 გ ხსნარი შეიცავს $\frac{20p}{100} = \frac{p}{5}$ გ A კომპონენტს, $\frac{20q}{100} = \frac{q}{5}$ გ B კომპონენტს და $\frac{20r}{100} = \frac{r}{5}$ გ C კომპონენტს. პირობის თანახმად,

$$\frac{p}{5} + 2 = \frac{q}{5}. \quad (8)$$

ანალოგიური მსჯელობით 30 გრამიანი ხსნარისათვის მივიღებთ კიდევ ერთ განტოლებას

$$\frac{3p}{10} = \frac{3r}{10} + 9. \quad (9)$$

(7)–(8)–(9) სისტემის ამონახსნია $p = 40, q = 50, r = 10$. პასუხი: A კომპონენტა 40%-ია, B კომპონენტა 50%-ია და C კომპონენტა 10%-ია.

ამოცანა 10. გვაქვს ერთნაირი მასის ორი შენადნობის ორი ნაჭერი. ამასთან, ისინი სპილენძს შეიცავენ სხვადასხვა პროცენტული თანაფარდობით. ორივე ნაჭერს ჩამოაჭრეს ერთნაირი მასის ნაწილები და თითოეული მათგანი გადაადნეს მეორე ნაჭრის დარჩენილ

ნაწილთან. ამის შემდეგ სპილენძის პროცენტული შედგენილობა ორივე ნაჭერში აღმოჩნდა ერთნაირი. რამდენჯერ ნაკლებია ჩამოჭრილი ნაწილი მთელზე?

ამოხსნა. ვთქვათ თავიდან მოცემული ნაჭრების მასაა a გ თითოეულისათვის და ვთქვათ მათში სპილენძის პროცენტული შემადგენლობებია p და q . დავუშვათ თითოეულ ნაჭერს ჩამოაჭრეს b გრამი და გადაადნეს მეორე ნაჭრის, დარჩენილ, $a - b$ გრამთან. მიღებული ნაჭრები ისევ a გრამს იწონის. პირველი ნაჭრიდან ჩამოჭრილი b გრამიანი ნაწილი შეიცავს $\frac{bp}{100}$ გ სპილენძს. მეორე ნაჭერში დარჩენილი $a - b$ გრამი შეიცავს $\frac{(a-b)q}{100}$ გ სპილენძს. სულ ახალი შენადნობებიდან პირველი შეიცავს $\frac{bp}{100} + \frac{(a-b)q}{100} = \frac{aq+b(p-q)}{100}$ გ სპილენძს. ე.ი. მისი პროცენტული შედგენილობა არის $\frac{aq+b(p-q)}{a} \%$. ასეთივე მსჯელობა ახალი შენადნობის მეორე ნაჭრისათვის მოგვცემს, რომ სპილენძის პროცენტული შედგენილობა იქნება $\frac{ap+b(q-p)}{a} \%$. პირობის თანახმად

$$\frac{aq+b(p-q)}{a} = \frac{ap+b(q-p)}{a}.$$

აქედან მივიღებთ $a = 2b$. პასუხი: 2-ჯერ ნაკლებია.

ამოცანა 11. ჭურჭელში გვაქვს გარკვეული პროცენტული შემადგენლობის მარილხსნარი. მისი n -ური ნაწილი გადმოასხეს მეორე ჭურჭელში და დარჩენილი ნაწილი აორთქლეს მანამ, სანამ მასში მარილის პროცენტული შემადგენლობა არ გაორმაგდა. ამის შემდეგ დარჩენილი ხსნარი და თავდაპირველად გადმოსხმული და შენახული ნაწილები ერთმანეთს შეურიეს შედეგად მიიღეს ახალი ხსნარი, რომელიც შეიცავს $p\%$ -ით მეტ მარილს ვიდრე თავდაპირველი ხსნარი. ა) დავადგინოთ თავდაპირველი ხსნარის პროცენტული შემადგენლობა; ბ) დავადგინოთ თავიდან მოცემული ხსნარის რა ნაწილია გადმოსხმული თუ საბოლოოდ აღმოჩნდა, რომ მიღებულ ხსნარში 1,5-ჯერ მეტი მარილის პროცენტული შემცველობაა, ვიდრე საწყის ხსნარში.

ამოხსნა. ვთქვათ თავიდან ჭურჭელში გვქონდა a ლ $r\%$ -იანი მარილხსნარი. დავუშვათ გადმოასხეს $\frac{a}{n}$ ლ სითხე. ჭურჭელში დარჩენილი $a - \frac{a}{n} = \frac{a(n-1)}{n}$ ლ მარილმჟავადან ამოაშრეს იმდენი წყალი, რომ მასში მარილის პროცენტული შემადგენლობა გამხდარა $2r\%$. m -ით აღვნიშნოთ, დროებითი ცვლადი, იმის დასადგენად თუ რამდენი წყალი ამოაშრეს ამ ოპერაციისას. $\frac{a(n-1)}{n}$ ლ შეიცავდა $\frac{a(n-1)r}{100n}$ ლ მარილს, ახლა კი $(\frac{a(n-1)}{n} - m)$ ლ შეიცავს $\frac{(a(n-1)-mn)2r}{100n}$ ლ მარილს. მაგრამ მარილის შემადგენლობა ამ ეტაპზე არ შეცვლილა. ამიტომ $\frac{a(n-1)r}{100n} = \frac{(a(n-1)-mn)2r}{100n}$. საიდანაც ვნახავთ $m = \frac{a(n-1)}{2n}$ ლ. ანუ ამოშრობის შემდეგ ჭურჭელში დარჩა $\frac{a(n-1)}{n} - \frac{a(n-1)}{2n} = \frac{a(n-1)}{2n}$ ლ $2r\%$ -იანი მარილხსნარი. მას დავმატა $\frac{a}{n}$ ლ $r\%$ -იანი მარილხსნარი. მივიღეთ $\frac{a(n-1)}{2n} + \frac{a}{n} = \frac{a(n+1)}{2n}$ ლ მარილხსნარი, რომელიც შეიცავს $\frac{\frac{a(n-1)}{2n} \cdot 2r}{100} + \frac{ar}{100n} = \frac{ar}{100}$ ლ მარილს.

ა) მიღებული მარილხსნარი არის $\frac{ar}{100} : \frac{a(n+1)}{200n} = \frac{2rn}{n+1} \%$ -იანი. ამიტომ $\frac{2rn}{n+1} - p = r$.

აქედან $r = \frac{p(n+1)}{n-1}$.

ბ) პირობის თანახმად, $\frac{2rn}{n+1}$ არის 1,5-ჯერ მეტი ვიდრე r . ამიტომ $\frac{2rn}{n+1} = 1,5r$. აქედან $n = 3$.

პასუხი: ა) თავდაპირველად ხსნარი იყო $\frac{p(n+1)}{n-1}$ -იანი; ბ) გადმოუსხამთ ხსნარის $\frac{1}{3}$ ნაწილი.

ამოცანა 12. გარკვეულ ნივთიერებას, თავისი მასის გაზრდის ხარჯზე, გააჩნია სინესტის შეწოვის თვისება. ამასთან, 1400 კგ სინესტის შესაწოვად საჭიროა ავილოთ 300 კგ-ით მეტი ამ ნივთიერების დაუნაწევრებელი რაოდენობა ვიდრე დანაწევრებული. ამ ნივთიერების დანაწევრებული და დაუნაწევრებელი მასის მთელი რაოდენობის რამდენ პროცენტს შეადგენს

შეწოვილი სინესტის მასა, თუ მეორე შემთხვევაში ეს რიცხვი 105 პროცენტით ნაკლებია, ვიდრე პირველ შემთხვევაში?

ამოხსნა. ვთქვათ ამ ნივთიერების დაუნაწევრებელი რაოდენობის მთელი მასის $x\%$ -ს შეადგენს შეწოვილი სინესტის მასა. მაშინ ნივთიერების დანაწევრებულ რაოდენობას შეეძლება მთელი თავისი მასის $(x + 105)\%$ -ის სინესტის მასის შეწოვა. პირობის თანახმად 1400 კგ შეადგენს ნივთიერების მთელი დაუნაწევრებელი მასის $x\%$ -ს. ამიტომ ნივთიერების მთელი დაუნაწევრებელი მასა შეადგენს $\frac{140000}{x}$ კგ. თუ ავიღებთ მასზე 300 კგ-ით ნაკლებს, ანუ $\frac{140000}{x} - 300$ კგ, დანაწევრებულ მასას, მაშინ მას შეეძლება იგივე რაოდენობის სინესტის შეწოვა. ე.ი.

$$\left(\frac{140000}{x} - 300\right) \cdot \frac{x+105}{100} = 1400.$$

ამ განტოლების დადებითი ამონახსნია $x = 175$. პასუხი: 175% და 280%.

ამოცანა 13. გვაქვს სპირტის სამი ხსნარი. მათში სპირტის პროცენტული შემადგენლობა გეომეტრიულ პროგრესიას ადგენს. თუ ამ ხსნარებს 2:3:4 პროპორციით შევურევთ ერთმანეთში, მივიღებთ ხსნარს, რომელიც 32% სპირტს შეიცავს. თუ ერთმანეთში შევურევთ აღნიშნულ ხსნარებს 3:2:1 პროპორციით, მაშინ მივიღებთ 22%-იან სპირტის ხსნარს. რანდენ პროცენტიან სპირტის ხსნარს წარმოადგენს პირველი?

ამოხსნა. აღვნიშნოთ-ით პირველ, მეორე და მესამე ხსნარში სპირტის შემცველობა პროცენტებში შესაბამისად. მაშინ 2 ერთეული პირველი ხსნარისა შეიცავს $\frac{2x}{100}$ გ სპირტს, 3 ერთეული მეორე ხსნარისა შეიცავს $\frac{3y}{100}$ გ სპირტს და 4 ერთეული მესამე ხსნარისა $\frac{4z}{100}$ გ სპირტს შეიცავს. სულ გვაქვს 9 ერთეული ხსნარი, რომელიც ამოცანის პირობით შეიცავს 32% სპირტს. ამიტომ დავწერთ

$$\frac{2x}{100} + \frac{3y}{100} + \frac{4z}{100} = \frac{9 \cdot 32}{100}. \quad (10)$$

ასეთივე მსჯელობით შეგვიძლია მეორე განტოლებაც დავწეროთ:

$$\frac{3x}{100} + \frac{2y}{100} + \frac{z}{100} = \frac{6 \cdot 22}{100}. \quad (11)$$

რადგან x, y და z ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას

$$y^2 = xz. \quad (12)$$

(10)–(11)–(12) სისტემას ამონახსნის ორი სამეული გააჩნია (12, 24, 48) და (64, -16, 100). მეორე ამონახსნი ამოცანის პირობისათვის შეუთავსებელია – პროცენტული შემადგენლობა არ შეიძლება იყოს უარტოფითი. პასუხი: პირველი ხსნარი 12%-იანია, მეორე 24%-იანი და მესამე 48%-იანი.

ამოცანა 14. ჭურჭელში 729 ლ სუფთა მჟავაა. ერთი და იგივე რაოდენობა სითხისა გადმოსხვს ჭურჭლიდან 6-ჯერ და ყოველი გადმოსხმისას ჭურჭელს წყლით ავსებდნენ. ბოლოს ჭურჭელში დარჩა 64 ლ მჟავა. რამდენ ლ სითხეს ასხამდნენ თითოეულ ჯერზე ჭურჭლიდან?

ამოხსნა. საძებნი სიდიდე x -ით აღვნიშნოთ. პირველი გადმოსხმის შემდეგ ჭურჭელში $729 - x$ ლ მჟავაა და x ლ წყალი. მაშასადამე მასში $\frac{729-x}{729}$ ნაწილი მჟავაა. მეორე გადმოსხმისას x ლ ხსნარს გადმოყვება $\frac{(729-x) \cdot x}{729}$ ლ მჟავა. ამიტომ ჭურჭელში დარჩებოდა $729 - x - \frac{(729-x) \cdot x}{729} = \frac{(729-x)^2}{729}$ ლ მჟავა. მესამე გადმოსხმისას ნარევეს გადმოყვებოდა $\frac{(729-x)^2 \cdot x}{729^2}$ ლ მჟავა და ჭურჭელში დარჩებოდა $\frac{(729-x)^2}{729} - \frac{(729-x)^2 \cdot x}{729^2} = \frac{(729-x)^3}{729^2}$ ლ მჟავა. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ დავრწმუნდებით, რომ საბოლოოდ ჭურჭელში დარჩებოდა $\frac{(729-x)^6}{729^5}$ ლ მჟავა, რაც ამოცანის პირობის თანახმად 64-ის ტოლია. ე.ი.

$$\frac{(729-x)^6}{729^5} = 64.$$

აქედან მივიღებთ $x = 243$. პასუხი: თითოეულ შემთხვევაში ასხამდნენ 243 ლ სითხეს.

ამოცანა 15. გვაქვს ორი სხვადასხვა პროცენტული შემადგენლობის მარილხსნარი. იმისათვის, რომ მივიღოთ 10%-იანი 100 გ მარილხსნარი საჭიროა პირველი ხსნარი ავიღოთ ორჯერ მეტი ვიდრე მეორე და ერთმანეთში შევურიოთ. რამოდენიმე დღის განმავლობაში ორივე ხსნარის ყოველი კილოგრამიდან 200–200 გრამი წყალი აორთქლდა. ამიტომ უკვე ანალოგიური ხსნარის მისათებად საჭირო გახდა პირველი ხსნარის ოთხჯერ მეტი რაოდენობით აღება, ვიდრე მეორე ხსნარისა. ვიპოვოთ თითოეული ხსნარის პროცენტული შემადგენლობა თავიდან.

ამოხსნა. ვთქვათ პირველი ხსნარის კონცენტრაციაა $p\%$, ხოლო მეორე ხსნარისა $q\%$. პირველი პირობის თანახმად 10%-იანი ხსნარის მისაღებად ვიღებთ ორჯერ მეტ პირველ ხსნარს. ასე, რომ უნდა ავიღოთ პირველი ხსნარის $\frac{200p}{3}$ გ და მეორე ხსნარის $\frac{100q}{3}$ გ. მივიღებთ პირველ განტოლებას: $\frac{200p}{300} + \frac{100q}{300} = 10$. ანუ

$$2p + q = 30. \quad (13)$$

ამოცანის მეორე პირობის თანახმად, თუ ადრე პირველი ხსნარის ყოველი 100 გ შეიცავდა $p\%$ მარილს, ახლა ამდენივე მარილს შეიცავს ხსნარის 80 გ. ასევე მეორე ხსნარის 80 გ, ახლა შეიცავს $q\%$ მარილს. ამ პირობებში 100 გ 10%-იანი ხსნარის მისაღებად საჭიროა ავიღოთ 80 გ პირველი ხსნარიდან და 20 გ მეორე ხსნარიდან. ამიტომ

$$p + \frac{q}{4} = 10. \quad (14)$$

(13)–(14) სისტემის ამონახსნია $p = 5, q = 20$. პასუხი: 5%, 20%.

ამოცანა 16. ავზში ორი მილით ერთდროულად იწყებენ წყლისა და მუდმივი კონცენტრაციის ხსნარის მიწოდებას. ავზის გავსების შემდეგ მასში 5%-იანი ხსნარი აღმოჩნდა. თუ იმ მომენტში, როცა ავზი სანახევროდ იყო ავსებული, შევწყვეტდით წყლის მიწოდებას, მაშინ ავზის გავსების შემდეგ მასში 10%-იანი კონცენტრაციის ხსნარი აღმოჩნდებოდა. გავარკვიოთ რომელი მილი უფრო სწრაფად ავსებს ავზს და რამდენჯერ. გავარკვიოთ აგრეთვე როგორი კონცენტრაციის ხსნარი მიეწოდებოდა მილიდან ავზში.

ამოხსნა. ვთქვათ სავესე აუზის x ნაწილს ავსებს წყლის მილი, ხოლო დანარჩენ $(1 - x)$ ნაწილს ავსებს მილი, რომელიც ხსნარს აწვდის ავზს. პირველი პირობის თანახმად, ამ შემთხვევაში, სავესე ავზში, 0,05 ნაწილი ხსნარის სუფთა შემადგენელს უკავია. მეორე პირობის თანახმად, ნახევარ ავზში $\frac{1}{2} \cdot 0,05 = 0,025$ ნაწილი ხსნარის სუფთა შემადგენელია. დანარჩენ ნახევარს ავსებს მხოლოდ ხსნარის მიმწოდებელი მილი. ამ ხსნარის კონცენტრაცია იყოს $p\%$. მაშინ შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\frac{p}{200} + 0,025 = 0,1.$$

საიდანაც მივიღებთ $p = 15(\%)$. დავუბრუნდეთ ამოცანის პირობის პირველ ნაწილს. ცხადია,

$$\frac{(1-x) \cdot 15}{100} = 0,05.$$

საიდანაც მივიღებთ $x = \frac{2}{3}$. შესაბამისად $1 - x = \frac{1}{3}$. ამიტომ $\frac{x}{1-x} = 2$. პასუხი: წყალი ორჯერ სწრაფად ისხმება. ხსნარის კონცენტრაციაა 15%.

ამოცანა 17. გვაქვს შენადნობის ორი ნაჭერი. პირველი იწონის 3 კგ და შეიცავს 40% სპილენძს, ხოლო მეორე, რომელიც 7 კგ–ს იწონის შეიცავს 30% სპილენძს. რანდენ–რამდენი უნდა ჩამოვჭრათ თითოეული ნაჭრიდან, რომ მივიღოთ სპილენძის $p\%$ -იანი 8 კგ შენადნობი?

ამოხსნა. ვთქვათ პირველი ნაჭრიდან უნდა ავიღოთ x კგ, ხოლო მეორე ნაჭრიდან $8 - x$ კგ. ცხადია უნდა ჩავთვალოთ, რომ $\begin{cases} x \leq 3 \\ 8 - x \leq 7 \end{cases}$ ანუ $1 \leq x \leq 3$. პირველი ნაჭერი შეიცავს $\frac{40x}{100}$ კგ სპილენძს, ხოლო მეორე ნაჭერი $\frac{(8-x) \cdot 30}{100}$ კგ–ს. ამოცანის პირობის გათვალისწინებით

$$\frac{40x}{100} + \frac{(8-x) \cdot 30}{100} = \frac{8p}{100}.$$

ამ განტოლების ამონახსნია $x = 0,8p - 24$. ამიტომ $8 - x = 32 - 0,8p$. გავითვალისწინოთ ზემოთ მოყვანილი ორმაგი უტოლობა: $1 \leq 0,8p - 24 \leq 3$. საიდანაც მივიღებთ p -ს დასაშვებ მნიშვნელობებს: $31,25 \leq p \leq 33,75$. პასუხი: უნდა ჩამოვჭრათ $(0,8p - 24)$ კგ პირველიდან და $(32 - 0,8p)$ კგ მეორედან, ამასთან $31,25 \leq p \leq 33,75$.

ამოცანა 18. ორი მილით ავზს მიეწოდება სითხე 100 ლ/წთ სიჩქარით. გვაქვს ორი ხსნარი. თუ ავურევთ თითოეული ხსნარის 10–10 ლიტრს 20 ლიტრ წყალთან, მივიღებთ 20%-იან ხსნარს. თუ ერთი საათის განმავლობაში პირველი მილით ავზში მივაწოდებთ პირველ ხსნარს, ხოლო მეორე მილით მეორე ხსნარს, მაშინ მივიღებთ 30%-იან ხსნარს. როგორი კონცენტრაციის ხსნარს მივიღებთ ავზში, თუ ერთი საათის განმავლობაში პირველი მილით მივაწოდებთ მეორე ხსნარს, ხოლო მეორე მილით პირველ ხსნარს?

ამოხსნა. ვთქვათ პირველი მილით მიეწოდება a ლიტრი წუთში, მეორე მილით კი b ლიტრი წუთში. ცხადია,

$$a + b = 100. \quad (15)$$

ხსნარების კონცენტრაცია აღვნიშნოთ p და q ასოებით შესაბამისად. პირობის თანახმად, 10–10 ლიტრი თითოეული ხსნარის და 20 ლიტრი წყლის შერევით მივიღებთ 40 ლ ახალ 20%-იან ხსნარს. ამიტომ

$$p + q = 80. \quad (16)$$

30%-იანი ხსნარის მისაღებად საჭიროა პირველი მილით მივაწოდოთ 1 საათის განმავლობაში პირველი ხსნარი და 1 საათის განმავლობაში მეორე მილით მეორე ხსნარი. ანუ

$$\frac{60ap}{100} + \frac{60bq}{100} = \frac{(60a+60b) \cdot 30}{100}.$$

აქედან მივიღებთ

$$ap + bq = 3000. \quad (17)$$

მივიღეთ (15)–(16)–(17) სისტემა. ამოცანის შეკითხვაა ვიპოვოთ $\frac{aq+bp}{100}$. ამისათვის გადავამრავლოთ (15) და (16) ტოლობები ერთმანეთზე:

$$ap + aq + bp + bq = 8000.$$

ამ ტოლობაში გავითვალისწინოთ (17). მივიღებთ $aq + bp = 5000$. პასუხი: 50%.

ამოცანა 19. გვაქვს ოქროსა და ვერცხლის ნარევის სამი ზოდი. მესამე ნარევის 2 გ შეიცავს იმდენივე ოქროს, რამდენსაც პირველი ნარევის 1 გ და მეორე ნარევის 1 გ ერთად. მესამე ზოდი იწონის იმდენს, რამდენსაც პირველი ზოდის ის ნაწილი, რომელიც 10 გ ოქროს შეიცავს და მეორე ზოდის ის ნაწილი, რომელიც 80 გ ოქროს შეიცავს, ერთად აღებული. მესამე ზოდი 4–ჯერ მძიმეა პირველზე და შეიცავს 75 გ ოქროს. რამდენ გრამ ოქროს შეიცავს პირველი ზოდი?

ამოხსნა. ვთქვათ 1 გრამი პირველი ნარევისა შეიცავს p გრამ ოქროს, 1 გრამი მეორე ნარევისა შეიცავს q გრამ ოქროს და 1 გრამი მესამე ნარევისა შეიცავს r გრამ ოქროს. მაშინ პირველი პირობის თანახმად,

$$p + q = 2r. \quad (18)$$

პირველი ზოდის ის ნაწილი, რომელიც 10 გ ოქროს შეიცავს არის $\frac{10}{p}$ გრამი, ხოლო მეორე ზოდის ის ნაწილი, რომელიც 80 გრამ ოქროს შეიცავს, არის $\frac{80}{q}$ გრამი. ამიტომ მესამე ზოდის წონაა $\frac{10}{p} + \frac{80}{q}$ გრამი, ხოლო პირველი ზოდის წონა იქნება მისი მეოთხედი, ანუ $\frac{10}{4p} + \frac{80}{4q}$ გრამი. პირობით მესამე ზოდი 75 გ ოქროს შეიცავს. ამიტომ

$$\left(\frac{10}{p} + \frac{80}{q}\right) \cdot r = 75. \quad (19)$$

(18) და (19) ტოლობები ასე გადავწეროთ:

$$\begin{cases} \frac{p}{r} + \frac{q}{r} = 2 \\ \frac{10r}{p} + \frac{80r}{q} = 75 \end{cases}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები $\frac{p}{r} \equiv a, \frac{q}{r} \equiv b$, მაშინ გვექნება სისტემა

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ \frac{2}{a} + \frac{16}{b} = 15 \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნებია $a_1 = \frac{2}{5}, b_1 = \frac{8}{5}$ და $a_2 = \frac{2}{3}, b_2 = \frac{4}{3}$. შესაბამისად, $p = \frac{2}{5}r, q = \frac{8}{5}r$, ან $p = \frac{2}{3}r, q = \frac{4}{3}r$. ამიტომ $\frac{p}{q} = \frac{1}{4}$ ან $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$. ერთ შემთხვევაში პირველ ზოდში ოქროს რაოდენობა იქნებოდა $\left(\frac{10}{4p} + \frac{80}{4q}\right) \cdot p = 2,5 + 20 \cdot \frac{p}{q} = 2,5 + 20 \cdot \frac{1}{4} = 7,5$ გრამი, რაც შეუძლებელია რადგან ამოცანის პირობით პირველი ზოდი არ შეიცავს 10 გრამ ოქროზე ნაკლებს. მეორე შემთხვევაში პირველი ზოდის ოქროს რაოდენობაა $\left(\frac{10}{4p} + \frac{80}{4q}\right) \cdot p = 2,5 + 20 \cdot \frac{p}{q} = 2,5 + 20 \cdot \frac{1}{2} = 12,5$ გრამი. პასუხი: 12,5 გ.

ამოცანა 20. გვაქვს სამი სახის ხსნარი, რომლებიც შედგენილია ელემენტებისაგან A, B და C . პირველი ხსნარი შეიცავს A და B ელემენტებს 3:5 ფარდობით. მეორეში შედიან მხოლოდ B და C ელემენტები 1:2 ფარდობით. მესამე ხსნარი შედგება A და C ელემენტებისაგან 2:3 ფარდობით. როგორი პროპორციებით უნდა ავიღოთ ეს ხსნარები, რომ მიღებულ ხსნარში A, B და C ელემენტები შედიოდნენ 3:5:2 ფარდობით?

ამოხსნა. ვთქვათ უნდა ავიღოთ პირველი ხსნარის x გრამი, მეორე ხსნარის y გრამი და მესამე ხსნარის z გრამი. მათი შერევით მიღებულ ხსნარში გვექნება A ელემენტი: $\frac{3x}{8}$ გრამი პირველი ხსნარიდან და $\frac{2z}{5}$ გრამი მესამე ხსნარიდან, B ელემენტი: $\frac{5x}{8}$ გრამი პირველი ხსნარიდან და $\frac{y}{3}$ გრამი მეორე ხსნარიდან, C ელემენტი: $\frac{2y}{3}$ გრამი მეორე ხსნარიდან და $\frac{3z}{5}$ გრამი მესამე ხსნარიდან. შესაბამისად შევადგენთ სისტემას:

$$\begin{cases} \frac{3x}{8} + \frac{2z}{5} = \frac{3}{5} \\ \frac{5x}{8} + \frac{y}{3} = \frac{5}{5} \\ \frac{5x}{8} + \frac{y}{3} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ $x = \frac{20z}{3}, y = 2z$. აქედან ვხედავთ, რომ აღებული ხსნარების რაოდენობები უნდა იყოს $20z, 6z$ და $3z$. პასუხი: 20:6:3.

V. უწყვეტი პროცესები ჩვენს ირგვლივ. ფუნქციების სწავლების მეთოდუკასთან დაკავშირებული საკითხები.

შესავალი. ფუნქციის ცნება უდავოდ ცენტრალურია მათემატიკური წიგნიერების პროგრამაში და მისი სრულყოფილად გააზრებული ცოდნა დაეხმარება მასწავლებელს სწორად და ჰარმონიულად წარმართოს მოსწავლეებთან ამ ძირითადი თემის სწავლება.

მათემატიკაში ძნელია დასახელდეს საკითხი, რომელიც მეტ-ნაკლებად არ უკავშირდება ფუნქციებს. რამდენადაც მათემატიკის სწავლება ზოგადად ემსახურება აბსტრაქტული აზროვნების უნარის ჩამოყალიბებას, თამამად შეიძლება ითქვას, რომ ფუნქციების თემის ეტაპობრივი ათვისება არსებით როლს თამაშობს ამგვარი უნარ-ჩვევების განვითარებაში.

ფუნქციის ინტუიციური განსაზღვრა.

ძირითად სიძნელეს ფუნქციების შესწავლისას წარმოადგენს თავად ამ ცნების განსაზღვრება, რომელიც აბსტრაგირების სხვადასხვა დონეზე იმდენად სხვადასხვაგვარად გამოიყურება, რომ ერთი შეხედვით შეუძლებელიცაა მათ შორის საერთო ხაზის აღმოჩენა. პირველი შეხებით ფუნქცია ეს არის კავშირი დამოკიდებულ და დამოუკიდებელ ცვლადებს შორის, წესი რომლითაც ერთ ელემენტს შეესაბამება მეორე, ფორმულა $y = f(x)$, გრაფიკი გამოხატული საკოორდინატო სისტემაზე, და ა. შ. გარდა იმისა, რომ მასწავლებელს სრულყოფილად უნდა ჰქონდეს გააზრებული ფუნქციის ყველა შესაძლო განსაზღვრა და მათ შორის კავშირი, მან მთელი თავის ოსტატობა უნდა ჩააქსოვოს გაკვეთილების განმავლობაში ამ თემაზე საუბრისას, რათა მოახერხოს რომ თითოეული მოსწავლისთვის მისთვის გასაგებ ენაზე ჩამოაყალიბოს ეს განსაზღვრა. იგულისხმება, რომ კლასში ყველა მოსწავლე ვერ ჩაწვდება ფუნქციის ცნების აბსტრაქტულ განსაზღვრას, მაგრამ ყველა მოსწავლეს უნდა შეექმნას “საკუთარი სწორი წარმოდგენა” ფუნქციების შესახებ.

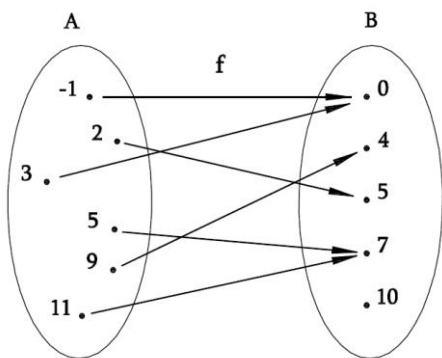
სანამ ფუნქციის ცნების განსაზღვრას შევეცდებოდეთ, მცირე ხნით შევჩერდეთ თავად განსაზღვრების როლზე და ადგილზე მათემატიკაში. დავფიქრდეთ იმაზეც შეგვიძლია თუ არა ყველა ცნების განსაზღვრა. ნიმუშად ავიღოთ რაიმე მარტივი განსაზღვრა, ვთქვათ პარალელოგრამის: *“პარალელოგრამი არის ისეთი ოთკუთხედი, რომლის მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია”*. როგორც ვხედავთ ამ განსაზღვრებაში ჩვენ გამოვიყენეთ უკვე ცნობილი ცნებები *ოთკუთხედის, მოპირდაპირე გვერდების, პარალელობის*. თუ დავაკვირდებით ეს სიტუაცია ტიპიურია, ყოველი ახალი ცნება უკვე ცნობილი ცნებების საშუალებით უნდა განისაზღვროს. ანუ, თუ ამ ცნებებს “კიბის საფეხურებზე” დალაგებულად წარმოვიდგენთ, ცნობილ ცნებებზე დაყრდნობით ავდივართ ახალ საფეხურზე. თუ ეხლა ამ კიბეზე დაშვებას დავიწყებთ და დავაკვირდებით თითოეული ცნების საყრდენ ცნებებს, არ შეიძლება ეს დაშვება უსასრულოდ გრძელდებოდეს. უნდა არსებობდნენ ისეთი ცნებები, რომელთაც უფრო მარტივი ცნებების საშუალებებით ვეღარ განსაზღვრავთ. ასეთ ცნებებს *საწყის ცნებებს* უწოდებენ და მათ მაგალითებს წარმოადგენენ *წერტილი, წრფე, სიბრტყე, სიძრავლე, რიცხვი* და ა.შ. (ანალოგიური სიტუაციაა ცნებათა შორის დამოკიდებულებების შესწავლისას, რაც მათემატიკაში ყალიბდება გარკვეული დებულებების სახით, რომლებსაც *თეორემებს* ან *ლემებს* ვუწოდებთ. თითოეული თეორემის დამტკიცებისას ვიყენებთ შედარებით მარტივ, უკვე ცნობილ დებულებებს და ვინაიდან აქაც შეუძლებელია “ქვედა საფეხურებზე” დაშვება უსასრულოდ გრძელდებოდეს, იძულებულნი

ვართ ზოგიერთი საწყისი დებულება დაუმტკიცებლად მივიღოთ. ამგვარ დებულებებს *აქსიომები* ეწოდება. მათი სამართლიანობა ბუნებრივად ცხადად გვეჩვენება*)

როგორც ვხედავთ ზუსტი განსაზღვრის არ მქონე საწყისი ცნებების არსებობა ყოველი მათემატიკურად მწყობრი თეორიისთვის აუცილებელია, მაგრამ ეს არ ნიშნავს, რომ ორაზროვნება დავუშვათ ამ ცნებების წარმოსახვაში, მით უმეტეს სწავლების პროცესში. კარგად უნდა გავერკვეთ, რომ საწყისი ცნებებისთვის არ არსებობს ზუსტი მათემატიკური განსაზღვრა, თორემ ჩვენი ახსნებით ეს ცნებები მაქსიმალურად ნათელი და არაბუნდოვანი უნდა გახდეს მოსწავლეთათვის. ჩვენ აქ არ მოვიტანთ ამგვარი ახსნა-განმარტებების ტიპიურ ნიმუშებს, რადგან ამით ძალიან გადავუხვევდით თემიდან.**

ფუნქცია არ წარმოადგენს საწყის ცნებას. იგი არ არის იმდენად მარტივი, რომ საწყის ცნებად გამოვაცხადოთ და მის მკაცრ განსაზღვრაზე აღარ ვიზრუნოთ. ფუნქციის ზუსტი განსაზღვრის ჩამოყალიბების სიძნელე დიამეტრულად საწინააღმდეგო ხასიათისაა. რაოდენაც პარადოქსულად არ უნდა ჟღერდეს მკითხველისათვის, რომელიც დარწმუნებულია მათემატიკის როგორც ზუსტი მეცნიერების ბუნებაში, საჭირო სიახლეების შემოტანა მათემატიკაში, ისევე როგორც ყველა საბუნებისმეტყველო მეცნიერებაში, თავდაპირველად ზოგადი ინტუიციის მოშველიებით ხდება და მათი გარკვევა, დაზუსტება და წესებად ფორმირება მხოლოდ დროთა განმავლობაში ხერხდება. ფუნქციის ფორმალური განსაზღვრა, რასაც დღეს შეიძლება ნებისმიერ სახელმძღვანელოში წავაწყდეთ, საუკუნეების განმავლობაში ყალიბდებოდა, ფორმას იცვლიდა და იხვეწებოდა. ისტორიას შემორჩა ლამის ყველა მეცნიერის სახელიც, რომელთაც საკუთარი წვრილი შეიტანეს ამ ფუნდამენტური ცნების ფორმირებაში. ამიტომაც გასაკვირი არაა, რომ მოსწავლეთა მიერ ამ საკითხის შესწავლა ერთი ხელის მოსმით ვერ მოხერხდება. ისინი დასახული მიზნისკენ ნელ-ნელა, ეტაპობრივად, მასწავლებლის დახმარებით და საკუთარი მონაწილეობის შეგრძნებით უნდა მივიდნენ.

პირველი წარმოდგენების ჩამოყალიბებისას ფუნქციის შესახებ აუცილებლად უნდა მოვიშველიოთ შემდეგი ტიპის, ერთი შეხედვით მარტივი მაგრამ მეტად მნიშვნელოვანი,



დიაგრამა. ვერავინ იტყვის, რომ ამ დიაგრამას რთული ფორმა აქვს, მაშინ როცა არ არსებობს არც ერთი საწყისი ცნება ფუნქციებთან დაკავშირებით, (როგორიცაა ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე, ანასახი, წინარესახე, შექცეული ფუნქცია და ა.შ.) რომელიც არ გამოიხატოს და არ აიხსნას ამგვარი დიაგრამის საშუალებით. უფრო მეტიც, მოგვიანებით, როდესაც გაცილებით უფრო რთული ფუნქციების სწავლა მოგვიწევს და მათი გამოსახვის ფორმაც სრულიად განსხვავებული იქნება,

არსებული ვითარების ამ მარტივი ისრების ენაზე თარგმნა ჩვენს წარმოსახვაში და ამგვარ დიაგრამებთან დაკავშირება, დაგვეხმარება ფუნქციებთან დაკავშირებული ნებისმიერი პრობლემის ნათლად წარმოსახვაში.

იმთავითვე მივაქციოთ ყურადღება, რა უნდა გამოიხატოს ამ დიაგრამაზე აუცილებლად და რისი გამოხატვის თავისუფლება გვაქვს დატოვებული. აუცილებლად უნდა ავიღოთ *ორი სიმრავლე* (ორი გროვა), მაგრამ რას დავარქმევთ მათ (ჩვენს შემთხვევაში ჰქვიათ A და B) ან რა *წესილებისაგან* (სიმრავლის *ელემენტები* შეგვიძლია მოვიხსენიოთ როგორც წერტილები.

ცხადია აქ არ იგულისხმება გეომეტრიული წერტილები) იქნებიან ისინი შემდგარნი სულერთია, ანუ **-1, 2, 3** და ა.შ. ან **0, 4, 5** და ა.შ. რიცხვების მაგივად შეგვეძლო აგველო სხვა რიცხვები ან სრულიად სხვა ელემენტები (მაგალითად **a, b, c**, და ა.შ.). ისრების აუცილებლად უნდა ჰქონდეთ გეზი ერთიდაიმავე მხარეს ერთი სიმრავლის ელემენტებიდან მეორე სიმრავლის ელემენტებისკენ (ანუ, არ შეიძლება ზოგი ისარი მიმართული იყოს **A**-დან **B**-სკენ, ხოლო ზოგი **B**-დან **A**-სკენ). პირველი სიმრავლის ყველა წერტილიდან უნდა გამოდიოდეს აუცილებლად ერთადერთი ისარი, მაშინ როცა მეორე სიმრავლის წერტილებში შეიძლება შედიოდეს ერთზე მეტი ისარი ან არც ერთი მათგანი (როგორც მაგალითად **7**-ში შედის ორი ისარი, ხოლო **10**-ში არცერთი). ვგულისხმობთ, როგორც ეს შესავალში აღვნიშნეთ, რომ მკითხველს აქვს ფუნქციების შესახებ იმდენი წინასწარი ცოდნა, რათა მიხვდეს ამ მოთხოვნების მიზეზს (წინააღმდეგ შემთხვევაში ეს მიზეზები მოგვიანებით გაირკვევა). ჩვენ უფრო სხვა კუთხით გავაშუქებთ ამ დიაგრამას და შევეცდებით ვუპასუხოთ შემდეგ კითხვებს: *რა შინაარსს ვდებთ ამ დიაგრამაში? სად არის აქ ფუნქცია?* როგორც ვხედავთ ნახაზის ზედა შუა ადგილში გამოსახულია ლათინური ასო *f*, რასაც როგორც წესი ვხმარობთ ფუნქციის აღსანიშნად მისი ლათინური სახელწოდების (function) გამო, მაგრამ ნახატზე რა არის აღნიშნული ამ *f*-ით, ისრები? არა, *f* მთელი სურათის “სათაურადაა” გამოყენებული. ყველაფერი ერთად აღებული, რაც ამ დიაგრამაზეა გამოსახული, და მთლიანობაში გააზრებული წარმოადგენს ფუნქციას. ვგულისხმობთ, რომ *ფუნქცია* ამ დიაგრამის შინაარსშია და მის აღმოსაჩენად არსში ლოგიკური ჩაწვდომაა საჭირო. ამ მიზნით საჭიროა სრულყოფილად გავერკვეთ დიაგრამაზე გამოსახული ისრების დანიშნულებაში. მოდით ჯერ ასე ვთქვათ: “ეს ისრები მიგვანიშნებენ, რომ **-1** გადავიდა **0**-ში, **2** -- **5**-ში, **3** -- **0**-ში, და ა.შ.” მაგრამ რას ნიშნავს “გადავიდა”. სტატიკურ დიაგრამაზე მოძრაობები ვერ შესრულდება. ეს მოძრაობები გონების თვალთა ლოგიკურად უნდა წარმოვიდგინოთ და ეს დიაგრამაც სიმბოლურად სწორედ ამგვარ “გადასვლებს” გამოსახავს. ყოველი რიცხვი **A** სიმრავლიდან ისრების საშუალებით პოულობს თავის *მეწყვილეს* **B** სიმრავლეში. საჭიროა გავერკვეთ ამ პროცესში რა არის მთავარი და რა შეგვიძლია დავტოვოთ ყურადღების მიღმა. მთავარია, რომ დიაგრამაზე გამოსახული ფუნქცია, მაგალითად, **-1**-ს უკავშირებს **0**-ს (“გადაჰყავს”, “გარდაქმნის”, “ლოგიკურად უკავშირებს”, “აწყვილებს”, განხილულ შემთხვევაში ყველა ეს სიტყვები სინონიმებია), რახან **-1**-იდან გამოსული ისარი შედის **0**-ში. რატომ ან რა მიზეზით შევიყვანეთ **-1**-დან გამოსული ისარი მანდამაინც **0**-ში, ფუნქციის მათემატიკური განსაზღვრისას არ გვავიწყდება (სწორედ ამ მიზეზის ქვეცნობიერი მიზეზის გამო ხდება ფუნქციის ცნება გაუგებარი დამწყებთათვის). მაშასადამე, სტატიის დასაწყისში ნახსენებ განსაზღვრებაში, რომ ფუნქცია ეს არის წესი, რომლითაც **A** სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება **B** სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი, არ იგულისხმება რომ ფუნქცია არის თვითონ *წესი*, ამ სიტყვის ტრადიციული გაგებით (ეს არის გავრცელებული შეცდომა). აქ იგულისხმება, რომ თავად ფუნქცია, მის მიერ მოწოდებული “ინსტრუქციით” თუ **A** და **B** სიმრავლის რომელი ელემენტები უკავშირდებათ ერთმანეთს (რაოდენ უცნაურადაც არ უნდა გამოიყურებოდეს ეს ინსტრუქცია. მაგალითად, განხილულ შემთხვევაში ეს “ინსტრუქცია” წარმოადგება ნახ. **1**-ზე გამოსახული დიაგრამის სახით) გვაძლევს წესს. ანუ როცა ვამბობთ, რომ განვიხილოთ ფუნქცია, რომელიც “ყოველ რიცხვს უთანადებს გაორმაგებულ ამ რიცხვს” ($y = 2x$) ჩვენ არ ვგულისხმობთ, რომ ფუნქცია არის ამგვარად ჩამოყალიბებული წესი (ან შესაბამისი ფორმულა). ჩვენ ვგულისხმობთ რომ ფუნქცია ეს არის ის კავშირები, რომლებიც მყარდება რიცხვებს შორის ზემოხსენებული წესით (მაგალითად,

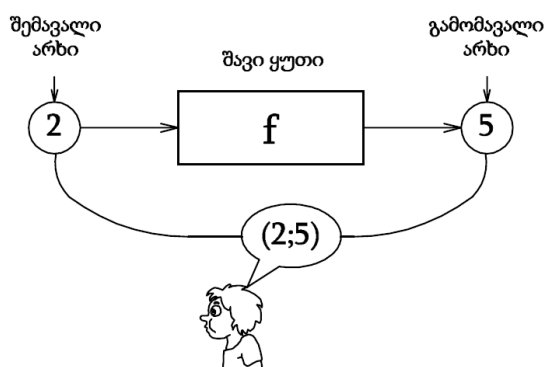
4 წყვილდება 8-სთან, 5 – 10-თან, და ა.შ.) უფრო მეტიც, ფუნქციის მოცემა ნიშნავს ყველა ერთმანეთთან დაკავშირებული ელემენტის ცოდნას. ანუ ნახ. 1-ზე მოცემული დიაგრამით გამოხატული ფუნქცია იმავე წარმატებით (ვგულისხმობთ ფუნქციის შესახებ ინფორმაციის სრულყოფილი შენარჩუნებით) შეგვეძლო ჩაგვეწერა როგორც $\{(-1; 0), (2; 5), (3; 0), (9; 4), (11; 7)\}$ (თუმცა ასეთი ჩაწერა ნაკლებად თვალსაჩინო იქნებოდა დამწყებთათვის). ამგვარად ჩაწერის შესაძლებლობებს ჩვენ მომავალშიც დავუბრუნდებით, როცა კიდევ უფრო დავაზუსტებთ ფუნქციის ცნებას.

ეხლა შემოვიტანოთ ფუნქციების შესწავლასთან დაკავშირებული ყველაზე მნიშვნელოვანი აღნიშვნა, რითაც ზუსტ მათემატიკურ ფორმას მივცემთ ზემოხსენებულ “ისრებას” და “დაწყვილებებს”. ის ფაქტი, რომ f ფუნქციას 2 გადაჰყავს 5-ში (იხ. ნახ. 1) იწერება ამგვარად:

$$f(2) = 5. \quad (1).$$

ამ დროს ვამბობთ, რომ f ფუნქციის მნიშვნელობა 2-ში არის 5. ამ შემთხვევაში სიტყვა “მნიშვნელობა” მათემატიკურ ტერმინს წარმოადგენს და არ იხმარება მისი ლიტერატურული გაგებით, თუმცა ინტუიციურად ცხადია რაღა მანდამინც ეს სიტყვა შეირჩა ამ ტერმინის დასაფიქსირებლად. ცხადია ანალოგიურად $f(3) = 0$ ანუ f ფუნქციის მნიშვნელობა 3-ში არის 0, $f(11) = 7$ და ა.შ. შემოღებული აღნიშვნის შინაარსში ჩაწვდომა ფაქტიურად ნიშნავს ფუნქციის არსის სწორად გაგებას. როგორც წესი, მოსწავლეებს უცნაურად ეჩვენებათ ეს აღნიშვნა. მათ უკვირთ რატომ დაიწერა 2-სა და 5-ს შორის ტოლობა. ცხადია 2 არ უდრის 5-ს. (1) ტოლობა ასე უნდა გავიგოთ, რომ f ფუნქციის საშუალებით 2 “გარდაიქმნა” 5-ად.

თანამედროვე კომპიუტერულ ეპოქაში არ უნდა შეგვეშინდეს ამ სიტყვის ხმარების, რადგან კომპიუტერთან ურთიერთობის პირველივე უნარ-ჩვევების გამომუშავებისას მოზარდებს უხდებათ ამგვარი “გარდაქმნების” ჩატარება კომპიუტერის ეკრანზე კურსორის სათანადო ადგილას მიყვანით და სათანადო ღილაკის დაწკაპუნებით. და კიდევ ერთხელ გავიმეოროთ, რომ ის რაღაც f გარდაქმნის 2-ს გამოცხადდა f -ის მნიშვნელობად 2-ში, და სწორედ ეს მნიშვნელობა უდრის 5-ს და არა 2 უდრის 5-ს. სწორედაც თანამედროვე კომპიუტერულ ეპოქაში მეტაფორულად ფუნქციას წარმოიდგენენ როგორც “შავ ყუთს”, რომელსაც გააჩნია



შემავალი არხი (input) და გამომავალი არხი (output). როდესაც ნახ. 1-ზე გამოხატული A სიმრავლის ელემენტები მიეწოდება ამ ყუთს შემავალი არხიდან, გამომავალ არხზე ვლევულობთ B სიმრავლის იმ ელემენტებს, რომლებთანაც ისინი არიან ისრით შეერთებულნი, ანუ გონების თვალთ დაწყვილებულნი. ამგვარ “მოწყობილობას” შეგვიძლია თამამად ვუწოდოთ ფუნქცია, რათა ეს აბსტრაქტული მათემატიკური ცნება

სიცოცხლის უნარიან და “ხელშესახებ” ობიექტად ვაქციოთ მოსწავლეთათვის, რომელთაც უამრავი ფუნქციებთან დაკავშირებული სავარჯიშო შეგვიძლია შევთავაზოთ ამ ტერმინებში. მაგალითად ამგვარი: “ნახ. 2-ზე გამოსახულ შავ ყუთში (იგი წარმოადგენს ნახ. 1-ზე მოცემული ფუნქციის შესაბამის მოწყობილობას) შემავალი არხიდან მივაწოდეთ -1. რა რიცხვი მოგვეწოდება გამომავალი არხიდან?” ან “რა რიცხვი უნდა მივაწოდოთ შემავალი არხიდან რათა გამომავალ არხზე მივიღოთ 5?” ან “რამდენი სხვადასხვა რიცხვი შეგვიძლია

მივაწოდოთ შემავალ არხზე, რათა გამომაველ არხზე მივიღოთ 7?” ან “შეგვიძლია მივაწოდოთ ისეთი რიცხვი, რომ გამოვიდეს 10?” და ა.შ. ამ ერთი შეხედვით სათამაშო კითხვებზე პასუხის მოფიქრებისას ფუნქციის ცნების აღსაქმელად საჭირო მრავალი უნარ-ჩვევა ყალიბდება მოზარდებში. ტერმინის “შავი ყუთი” ხმარება ნახ. 2-ზე გამოხატული მოწყობილობის აღსანიშნად, ხაზს უსვამს იმ ფაქტს, რომ ჩვენ არ გვაინტერესებს თუ რისგან შედგება “ყუთი”, რა მექანიზმებით ახერხებს იგი თავის დანიშნულების შესრულებას. ჩვენთვის მთავარია მხოლოდ იმის ცოდნა თუ რა “რეაქციას” იძლევა იგი თითოეული “გალიზიანებისას”. თუმცა ხშირ შემთხვევაში ეს ცოდნა სწორედ “შინაგანი სტრუქტურის” აღწერით შეიძლება იყოს გადმოცემული, როგორც მაგალითად ეს ნახ. 3-ზე მოცემულ სიტუაციაშია გაკეთებული.

ეხლა განვიხილოთ განსხვავებული ფორმით წარმოდგენილი ფუნქცია

$$y = 2x, \quad (2)$$

რომელიც ჩვენ ზემოთ უკვე ვახსენეთ. ფუნქციის შესახებ შექმნილი წარმოდგენები, რაც ნახ. 1-ზე გამოსახულმა დიაგრამამ და თანდართულმა მსჯელობებმა შეგვიქმნა, თითქოს არსად ჩანს ტოლობა (2)-ში, მაგრამ ეს მხოლოდ ერთი შეხედვით. თუ უფრო ღრმად ჩავუკვირდებით საკითხს ტოლობა (2) სწორედაც რომ შეიძლება “გადაითარგმნოს” ნახ. 1-ზე გამოსახული ისრების ენაზე. ალბათ ნათელია როგორაც, **A** და **B** სიმრავლეების როლში უნდა ავიღოთ ყველა შესაძლო რიცხვების სიმრავლე. გასაგებია, რომ ამ სიმრავლეს ისე თვალნათლივ ვეღარ დავხატავთ, როგორც ეს ნახ. 1-ზე გამოსახული სასრული სიმრავლეებისთვის გავაკეთეთ, მაგრამ ამით ფუნქციის ძირითადი იდეა არ დაზარალდება. მთავარია წარმოვიდგინოთ, რომ თითოეული რიცხვიდან გამოდის ისარი და შედის გაორმაგებულ ამ რიცხვში. მაგალითად: $2 \rightarrow 4$; $5 \rightarrow 10$; $-3 \rightarrow -6$ და ა.შ. ცხადია აქ ტოლობა (2)-ით გაჩენილ უსასრულო რაოდენობა ისართა შორის, მხოლოდ რამოდენიმე ამოვარჩიეთ სანიმუშოდ და ყველა მათგანს ვერც ჩამოვწერთ, მაგრამ თავად ფუნქცია, როგორც ასეთი, ყველა ამ ისრების ერთობლიობას წარმოადგენს. როგორც ადრეც გავაკეთეთ, ისრების სახით გამოხატული კავშირი შეგვეძლო წყვილებითაც ჩაგვეწერა: $\{(2; 4), (5; 10), (-3; -6) \dots\}$ ოღონდ კიდევ ერთხელ გავიმეოროთ, რომ (2) ტოლობის ფუნქციად წარმოდგენა ყველა ამგვარი წყვილების წარმოდგენას ნიშნავს. თუ უკვე შემოღებულ აღნიშვნებსაც გამოვიყენებთ, ეს ტოლობა შეგვიძლია ამგვარი ფორმითაც გადავწეროთ

$$f(x) = 2x,$$

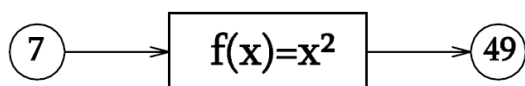
რომელშიც კიდევ უფრო ნათლად გამოჩნდება მისი როგორც ფუნქციის ბუნება. ფუნქციის (2) ფორმულის სახით ჩაწერის დროს, როგორც წესი x -ს დამოუკიდებელ ცვლადს ან არგუმენტს უწოდებენ, ხოლო y -ს დამოკიდებულ ცვლადს.

ვფიქრობთ, თანდათან იკვეთება საერთო ხაზი ნახ. 1-ზე გამოხატულ ფუნქციასა და ტოლობა (2)-ით მოცემულ ფუნქციას შორის (როგორც ვხედავთ ფორმით ისინი საკმაოდ განსხვავდებიან ერთმანეთისგან). ჩვენ გავაგრძელებთ ამ საერთო ხაზის აღმოჩენას ფუნქციის

წარმოდგენის სხვა ხერხებშიც, რითაც მოვემზადებით ფუნქციის ცნების დაზუსტებული განსაზღვრებისთვის.

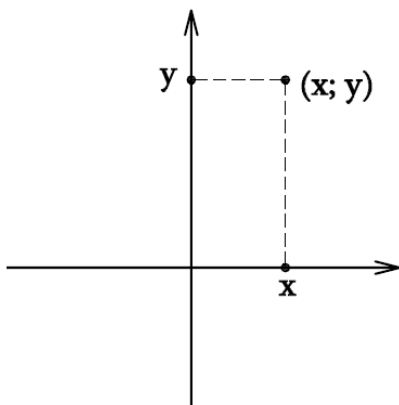
ფუნქციის გრაფიკი.

ეხლა გადავიდეთ გრაფიკით მოცემული



ფუნქციების განხილვაზე. მართალია ამ ფორმით მხოლოდ რიცხვითი ფუნქციები (რიცხვებს შორის დამოკიდებულებები) შეიძლება გამოისახოს, მაგრამ სწორედ ამგვარი ფუნქციები თამაშობენ უმნიშვნელოვანეს როლს მათემატიკაში.

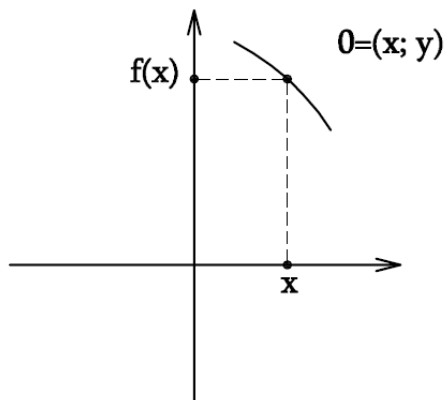
გრაფიკების განხილვამდე დეკარტის კოორდინატთა სისტემა უნდა გავიხსენოთ.*) ვგულისხმობთ, რომ მოსწავლეებმა უკვე უნდა იცოდნენ და მათ უნდა შეეძლოთ სიბრტყეზე



შემოტანილ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში თითოეული წერტილისთვის მისი პირველი და მეორე კოორდინატების პოვნა, და პირიქით ყოველი დალაგებულ რიცხვთა წყვილისთვის სიბრტყეზე შესაბამისი წერტილის აგება. ეს ცოდნა თანამედროვე მათემატიკის ფუნდამენტს, “ანბანს” წარმოადგენს და ამ ერთი შეხედვით მარტივი დავალების შესრულება მოსწავლეებს წერა-კითხვასავით გამართულად უნდა შეეძლოთ. ამ მიზნის მისაღწევად მათემატიკის მასწავლებელს დრო და ენერგია არ უნდა დაენანოს, რათა მოსწავლეებს შესაფერისი დოზით შესთავაზოს სათანადო აქტივობები და სავარჯიშოები.

(დაწყებითი სწავლების საფეხურებზე კოორდინატთა სისტემის ათვისებისაკენ მიმავალი გზა რიცხვითი ღერძის შესწავლაზე გადის და მასაც სათანადო ყურადღება უნდა მიექცეს.) იმედს გამოვთქვამთ, რომ საბოლოოდ ისევე როგორც ყოველი, სწავლების ადეკვატურ პირობებში ჩავარდნილი, მოზარდი ახერხებს წერა-კითხვის შესწავლას, ასევე ყველა მოსწავლემ უნდა შეძლოს მათემატიკური ცოდნის მიღების და გათავისების ამ ეტაპის წარმატებით დაძლევა. მათემატიკური პროგრამით გათვალისწინებული თითქმის ყველა საკითხი 7-12 კლასებში უშუალოდ ან ირიბად ეყრდნობა მოსწავლეთა მიერ კოორდინატთა სისტემაში სწორად ორიენტირების უნარს.

*) აღვნიშნოთ აქვე რომ ფრანგი ფილოსოფოსისა და მათემატიკოსის რენე დეკარტეს (1596-1650) მიერ კოორდინატთა სისტემის შემოტანა იყო მათემატიკის განვითარებაში გადადგმული უდიდესი ნაბიჯი, რითაც მოხდა მათემატიკის “ვიზუალიზაცია”, ალგებრისა



და გეომეტრიის შერწყმა, და ა.შ.

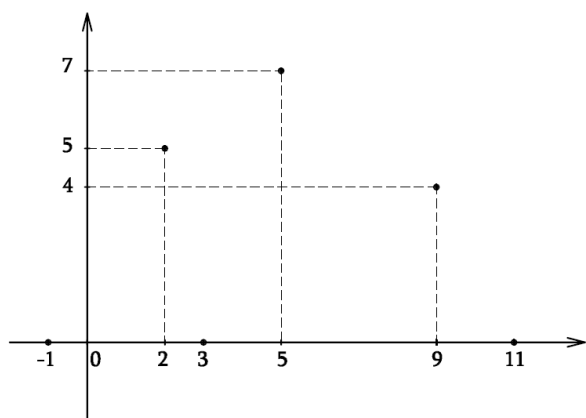
თუკი ვიგულისხმებთ, რომ მოსწავლეს ზემოხსენებულ დონეზე ათვისებული აქვს საკოორდინატო სიბრტყე და გააზრებული აქვს წერტილებსა და კოორდინატებს შორის კავშირი, ერთი ნაბიჯილაა დარჩენილი ნახაზზე გამოსახულ გრაფიკში “ამოვიცნოთ” ფუნქცია, ანუ შევამჩნიოთ ის დამოკიდებულება რიცხვებს შორის რაც ნახ. 1-ზე ისრების საშუალებით იყო გამოხატული. მართლაც, აქ კეთდება ელემენტარული მაგრამ მნიშვნელოვანი შეთანხმება. საკოორდინატო სიბრტყეზე აღებული

წერტილი ბუნებრივად მიგვანიშნებს, რომ მისი პირველი კოორდინატი დაუკავშირდა მეორე კოორდინატს, ანუ დაწყვილდა მეორე კოორდინატთან. აქედან გამომდინარე, საკოორდინატო სიბრტყის $O = (x; y)$ წერტილი წარმოადგენს f ფუნქციის გრაფიკის წერტილს მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა f ფუნქცია x -ს უთანადებს y -ს, რაც როგორც გვახსოვს ფორმულის სახით ამგვარად იწერება, $y = f(x)$ (იხ. ნახ. 5). უფრო მეტიც, როდესაც ფუნქცია არის წარმოდგენილი გრაფიკის სახით, ყოველ მოსწავლეს უნდა შეეძლოს

მოცემული x წერტილისათვის იპოვოს შესაბამისი $f(x)$ მნიშვნელობა. ალბათ ძნელი არ არის, უკვე ახსნილის მიხედვით, მივხვდეთ როგორ უნდა გაკეთდეს ეს, მაგრამ ჩვენ საგანგებოდ ჩამოვყალიბებთ ზუსტ წესს: „მოცემული x წერტილისთვის $f(x)$ -ის საპოვნელად ჯერ x წერტილზე უნდა ავღმართოთ OX ღერძის მართობი (გავავლოთ OY ღერძის პარალელური წრფე) და ვიპოვოთ მისი თანაკვეთა გრაფიკთან (თუ იგი გრაფიკს არ გადაკვეთს, მაშინ ფუნქცია x წერტილში განსაზღვრული არ არის, ანუ $f(x)$ არ არსებობს). შემდეგ ვიპოვოთ ამ გადაკვეთის წერტილის მეორე კოორდინატი (ანუ დავაგეგმილოთ ეს წერტილი OY ღერძზე), რომელიც იქნება $f(x)$ “. ეს წესი თითქმის მარტივია და ახალს არაფერს ამბობს, მაგრამ მისი არა მარტო გააზრება, არამედ ბუნებრივად გათავისებაც მეტად სასარგებლო იქნება მკითხველათათვის.

თავად გრაფიკი წარმოადგენს ფუნქციის მიერ რიცხვებს შორის დამყარებული თითოეული კავშირის აღმნიშვნელი შესაბამისი წერტილების ერთობლიობას. მაგალითისთვის, ნახ. 1-ზე გამოხატული ფუნქციის გრაფიკს ამგვარი სახე ექნება (იხ. ნახ. 6).

ამ გრაფიკს ერთი შეხედვით უცნაური სახე აქვს, რადგან მსგავს სურათებს თითქმის არასდროს ვაწყდებით სახელმძღვანელოებში, მაგრამ თუ კარგად დავაკვირდებით იგი ზუსტად იმავე კავშირებს გამოსახავს რასაც ისრები აკეთებენ ნახ. 1-ზე. მაშასადამე ამ ორი ნახაზის (ნახ. 1 და ნახ. 6) მათემატიკური შინაარსი ერთიდაიგივეა. როგორც წესი, გრაფიკებს ჩვენ რაიმე უწყვეტი წირების სახით წარმოვიდგენთ ხოლმე, რაც თავისთავად მიგვანიშნებს, რომ რიცხვთა უსასრულო რაოდენობა გვაქვს ერთმანეთთან დაკავშირებული. ცხადია ამ დროს მოცემული კავშირების გამოხატვა ისრების



საშუალებით შეუძლებელია და გრაფიკი ფუნქციის მოცემის გაცილებით მოსახერხებელ ფორმას წარმოადგენს. როგორ ავაგოთ რაიმე ფორმულით მოცემული ფუნქციის გრაფიკი, მხოლოდ და მხოლოდ ტექნიკურ სიძნელეებთანაა დაკავშირებული. ჩვენ ჯერჯერობით ფუნქციის შინაარსში ჩაწვდომას და მისი გამოხატვის მრავალფეროვნების გაგებას ვცდილობთ. იმედია მკითხველისთვის ახლა უფრო ნათელი გახდა ფუნქციის ცნება, თუმცა ჩვენ ჯერ კიდევ არ ჩამოგვიყალიბებია ფუნქციის ზუსტი მათემატიკური განსაზღვრა (ამას მოგვიანებით გავაკეთებთ). არ გაგვიმახვილებია ყურადღება იმ ფაქტზედაც (თუმცა გაკვრით უკვე ვახსენეთ), რომ კატეგორიულად იკრძალება f ფუნქციით ერთ ელემენტს ერთზე მეტი ელემენტი შეესაბამებოდეს, ანუ ნახ.1-ზე რომელიმე წერტილიდან ორი ან მეტი ისარი გამოდიოდეს. ეს სხვანაირად იმასაც ნიშნავს, რომ $f(x)$ ყოველთვის ცალსახად განსაზღვრული უნდა იყოს თავისი მნიშვნელობით, რაც გრაფიკების ენაზე იმას ნიშნავს, რომ ყოველი OY ღერძის პარალელური წრფე გრაფიკს კვეთს არაუმეტეს ერთი წერტილისა. არ გვითქვამს ისიც, რომ ხშირად ფუნქციებს ასახვას უწოდებენ, განსაკუთრებით მაშინ როცა მათ გეომეტრიაში განვიხილავთ, როგორც სიბრტყის წერტილებს შორის კავშირს (პარალელური გადატანა, ღერძული სიმეტრია, მობრუნება და ა.შ. წარმოადგენენ ამგვარი

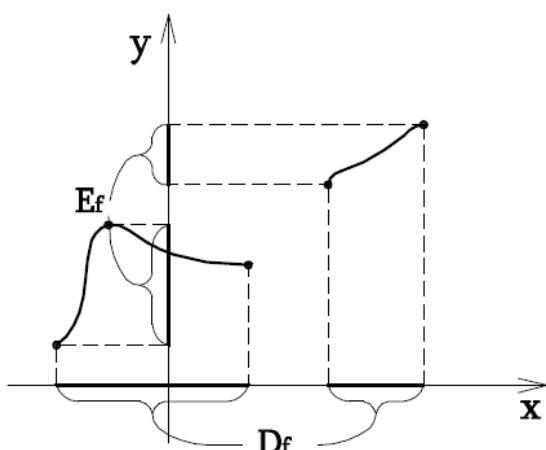
ასახვების ანუ ფუნქციების ნიმუშებს. იხ. ამავე წიგნში მოთავსებული სტატია „ვექტორები და სიბრტყის გარდაქმნები“).

ფუნქციებთან დაკავშირებული ტერმინოლოგია.

ჩვენ ეხლა გადავალთ ფუნქციებთან დაკავშირებული ტერმინოლოგიის დაზუსტებაზე და მოცემული ფუნქციიდან სხვადასხვა ფუნქციების აგებაზე, რითაც კიდევ უფრო დავხვეწთ ჩვენს წარმოდგენას ამ ცნებაზე. საილუსტრაციოდ ხშირად ისევ და ისევ ნახ.1-ზე გამოხატულ მარტივ ფუნქციას გამოვიყენებთ.

ყველა ფუნქციას გააჩნია განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა არე. ნახ.1-ზე მოცემული ფუნქციისთვის განსაზღვრის არე არის $A = \{-1, 2, 3, 5, 9, 11\}$, ანუ ეს არის იმ წერტილების სიმრავლე საიდანაც ისრები უნდა გამოდიოდნენ, ხოლო მნიშვნელობათა არე- $B = \{0, 4, 5, 7, 10\}$, ანუ იმ წერტილების სიმრავლე სადაც ისრები უნდა შედიოდნენ. ეს უკანასკნელი ტერმინი არ არის საყოველთაოდ მიღებული. ხშირად მის ნაცვლად ხმარობენ *მნიშვნელობათა სიმრავლეს*, მაგრამ ჩვენ განვასხვავებთ ამ ორ ტერმინს. მნიშვნელობათა სიმრავლედ უფრო სწორი იქნება მივიჩნიოდ $\{0, 4, 5, 7\}$. ანუ 10 შედის მნიშვნელობათა არეში, მაგრამ არ შედის მნიშვნელობათა სიმრავლეში (ცხადია რა მიზეზის გამოც). ეს განსხვავება არ თამაშობს არსებით როლს ფუნქციების შესწავლისას. აღსანიშნავია ის გარემოებაც, რომ განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა არე ან სიმრავლე შეიძლება იყოს ნებისმიერი ორი სიმრავლე, არა მანდამინც რიცხვითი სიმრავლე. ხშირად მათ აღნიშნავენ, შესაბამისად, D_f -ით, R_f -ით, და E_f -ით. ბუნებრივია ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ მკითხველს უკვე აქვს საკმარისი წარმოდგენა სიმრავლეების შესახებ, თუმცა ჩვენც კიდევ ერთხელ ავხსნით ამ ცნების შინაარსს გარკვეული მოსამზადებელი სამუშაოების ჩატარების შემდეგ ფუნქციის ზუსტი მათემატიკური განსაზღვრის წინ. თუ გავიხსენებთ სიმრავლის მოცემის ხერხებს, გარდა ელემენტთა უბრალო ჩამონათვალისა, მაგალითად $A = \{-1, 2, 3, 5, 9, 10\}$ ან $B = \{0, 4, 5, 7, 10\}$, ჩვენ სიმრავლეებს ხშირად ვწერთ $\{x: P(x)\} = \{x \in U: P(x)\}$ სახით, რაც იმ x ელემენტების ერთობლიობას ნიშნავს (U სიმრავლიდან) რომელთაც P თვისება აქვთ, მაშინ მოცემული f ფუნქციისათვის შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ $D_f = \{x: f(x) \text{ არსებობს ანუ განსაზღვრულია}\}$ და $E_f = \{y: \text{არსებობს } x \in D_f \text{ რომლისთვისაც } f(x) = y\}$. მივაქციოთ ყურადღება, რომ ამ გზით ჩვენ ჩავწერეთ f -ის მნიშვნელობათა სიმრავლე E_f და არა მნიშვნელობათა არე R_f . ამ უკანასკნელის ჩაწერა ანალოგიური გზით გავგიჟირდებოდა. წინასწარ დასახელებული ნებისმიერი B , რომელიც მოიცავს E_f -ს, $B \supset E_f$, შეიძლება იყოს f -ის მნიშვნელობათა არე. თუ ფუნქციის განსაზღვრის არე არ არის მკაფიოდ ჩამოყალიბებული, მაშინ იგი ჩანაწერის კონტექსტიდან იქნება გასაგები. მაგალითად თუ ფუნქცია მხოლოდ ფორმულის სახით არის ჩაწერილი, ვთქვათ $f(x) = \sqrt{x-2}$, ყოველთვის იგულისხმება, რომ განსაზღვრის არე არის ყველა იმ რიცხვების სიმრავლე რომელთათვისაც გამოსახულებას აზრი აქვს, ანუ ამ შემთხვევაში $D_f = [2; +\infty)$. მნიშვნელობათა არეც როგორც წესი კონტექსტიდანაა ცნობილი, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე ხშირად ჩვენ თვითონ უნდა ვიპოვოთ.

განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე შეგვიძლია ფუნქციის მეტაფორულად „შავი ყუთის“ სახით წარმოდგენითაც გავიაზროთ (იხ. ნახ.2) კერძოდ, ყველა იმ ელემენტთა (დასაშვებ მნიშვნელობათა) ერთობლიობას, რომელთა



შემაჯალ არხზე მიწოდებითაც მიიღება რაიმე გამომავალი პასუხი, ჰქვია განსაზღვრის არე. ხოლო ყველა შესაძლო გამომავალი პასუხების შეგროვებით მივიღებთ მნიშვნელობათა სიმრავლეს. ამავე ხერხით შეგვიძლია ავხსნათ ისეთი მნიშვნელოვანი ცნებები, როგორიცაა *ანასახი* და *წინარესახე*. თუ A_0 არის f ფუნქციის განსაზღვრის არის ქვესიმრავლე, $A_0 \subset A$, მაშინ A_0 -ის ანასახი f ფუნქციით (აღინიშნება $f(A_0)$ -ით) ეწოდება შემაჯალ არხზე A_0 -ის ყველა ელემენტის შეყვანის შემდგომ გამომავალი პასუხების შეგროვებით მიღებულ სიმრავლეს, ანუ $f(A_0) = \{f(x) : x \in A_0\}$. მაგალითად, ნახ. 1-ზე გამოსახული ფუნქციისთვის $f(\{-1, 5, 11\}) = \{0, 7\}$. ცხადია ანასახი ყოველთვის არის მნიშვნელობათა არის ქვესიმრავლე, ამასთანავე $f(A) = E_f$. თუ B_0 არის f ფუნქციის მნიშვნელობათა არის ქვესიმრავლე, $B_0 \subset B$, მაშინ B_0 -ის წინარესახე f ფუნქციით (აღინიშნება $f^{-1}(B_0)$ -ით) ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომელთა შემაჯალ არხში შეყვანით გამომავალი პასუხი მოხვდება B_0 -ში, ანუ $f^{-1}(B_0) = \{x : f(x) \in B_0\}$. მაგალითად, ნახ. 1-ზე გამოსახული ფუნქციისთვის $f^{-1}(\{0, 7\}) = \{-1, 3, 5, 11\}$. ცხადია წინარესახე ყოველთვის არის განსაზღვრის არის ქვესიმრავლე, ამასთანავე $f^{-1}(B) = A = D_f$. მოსწავლეებს დავავალეთ იგივე ცნებები (ანასახი და წინარესახე) გამოთქვან ისრების ენაზე.

თუ f ფუნქცია გრაფიკით არის მოცემული, მაშინ D_f იქნება გრაფიკის წერტილების OX ღერძზე დაგეგმილებით მიღებული წერტილების სიმრავლე, ხოლო E_f იქნება იმავე წერტილების OY ღერძზე დაგეგმილებით მიღებული წერტილების სიმრავლე. მოსწავლეთათვის კარგი სავარჯიშო იქნება აგრეთვე OX ღერძზე აღებული რაიმე სიმრავლისთვის მისი ანასახის მოძებნა OY ღერძზე, ან პირიქით, OY ღერძზე აღებული რაიმე სიმრავლის წინარესახის მოძებნა OX ღერძზე.

განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის ცნებების დაზუსტების შემდეგ კიდევ ერთხელ დავუბრუნდეთ ფუნქციის ცნებას და მისი ამგვარი განსაზღვრება მოვიტანოთ: “ვიტყვი, რომ მოცემულია f ფუნქცია A და B სიმრავლეებს შორის და ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ $f: A \rightarrow B$ (იგულისხმება, რომ A არის განსაზღვრის არე, ხოლო B - მნიშვნელობათა არე) თუკი A სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება B სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი”. ეს განსაზღვრა სათანადო ახსნა განმარტებებთან ერთად მოსწავლისთვის შეიძლება მრავლისმთქმელი აღმოჩნდეს და შესაფერისი სავარჯიშოების დამოუკიდებლად შესრულების შემდეგ მას შეუძლია სწორად ჩაწვდეს ფუნქციის არსს, მაგრამ იგი ვერ გამოდგება ფუნქციის ზუსტ მათემატიკურ განსაზღვრად, რადგან აქ გამოვიყენეთ ცნება “შესაბამისობა”, რომლის ზუსტი განსაზღვრაც ჯერ ისევე არ გვიხსენებია, როგორც ფუნქციისა. მაშასადამე ზემოხსენებული განსაზღვრა ლოგიკური თვალსაზრისით ტავტოლოგიას წარმოადგენს და ადრე ხსენებულ “სინონიმთა” სიას: გადაჰყავს, გარდაქმნის, ლოგიკურად უკავშირებს, აწყვილებს, (ჩვენ არ დავზარდებით მათ გამეორებას) კიდევ ერთი სიტყვა “შესაბამისობაში მოჰყავს” მიემატა. მიუხედავად ამისა, ზემოთ მოტანილი განსაზღვრა სწორად წარმოგვიდგენს ფუნქციის თვისებებს და მის შინაარსს, ამიტომ ჩვენ სავსებით შეგვიძლია ვისარგებლოთ მით და ჩვენი შემდგომი მსჯელობებიც ამ განსაზღვრებას დავაყრდნობთ. ვფიქრობთ, წინასწარ ჩატარებული ვრცელი მსჯელობები აღმოგვხვრის ამ განსაზღვრებასთან დაკავშირებულ ყოველგვარ ბუნდოვან ადგილს და ორაზროვნებას. მოგვიანებით ლოგიკური სიმკაცრის მიზნით ფუნქციის მათემატიკურად ზუსტ განსაზღვრასაც შემოგთავაზებთ.

ეხლა დავსვათ ასეთი კითხვა: “როდის არის ორი ფუნქცია ტოლი ანუ ერთიდაიგივე? საზოგადოდ ტოლობის ცნება მათემატიკის შემეცნების უპირველეს იარაღს წარმოადგენს.

ერთი შეხედვით თავისთავად ცხადია რას ნიშნავს ტოლობა და მას არავითარი განსაზღვრა არ სჭირდება, მაგრამ მათემატიკაში ხშირად ხდება, რომ ფორმით სრულიად განსხვავებულად წარმოდგენილ ობიექტებს ერთიდაიგივე შინაარსი აქვთ, რის გამოც მათ ტოლს უწოდებენ (ამგვარი სიტუაციის კლასიკური ნიმუშია წილადების ტოლობა $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$). ამიტომ ხშირად ისმის საკითხი შემოღებულ ობიექტებს შორის ტოლობის ცნების დაზუსტების. ფუნქციებს შორის ტოლობა იმგვარად უნდა განვსაზღვროთ, რომ ნახ. 1-ზე და ნახ. 6-ზე გამოსახული ფუნქციები ტოლი გამოვიდეს (მიუხედავად იმისა, რომ ისინი სრულიად განსხვავებულად გამოიყურებიან). კერძოდ „ორ f და g ფუნქციას ეწოდება ტოლი თუკი ამ ფუნქციებს ერთიდაიგივე განსაზღვრის არე აქვთ, $D_f = D_g$, და განსაზღვრის არის ყოველი x წერტილისათვის მისი შესაბამისი მნიშვნელობები f ფუნქციით და g ფუნქციით ერთიდაიგივეა, $f(x) = g(x)$ “. ბუნებრივია ფუნქციათა ტოლობის განსაზღვრა სწორედ ასეთი უნდა ყოფილიყო, მაგრამ მივაქციოთ ყურადღება რამოდენიმე არც თუ უმნიშვნელო დეტალს. f და g რომ ტოლი იყოს ისინი აუცილებლად ერთიდაიგივე სიმრავლეზე უნდა იყვნენ განსაზღვრულნი. მაგალითად, თუკი $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ და $g(x) = x+2$ მაშინ f და g როგორც ფუნქციები ტოლი არ არიან, თუმცა მოსწავლე რომელიც მაგალითის გამოყვანისას დაწერს $\frac{x^2-4}{x-2} = x+2$ არავითარ შეცდომას არ დაუშვებს. საქმე უბრალოდ იმაშია, რომ თუმცა $f(x) = g(x)$ როცა $x \neq 2$ თავად 2 არ შედის f -ის განსაზღვრის არეში, $2 \notin D_f$, მაშინ როცა $2 \in D_g$. ე.ი. $D_f \neq D_g$ და ამიტომაც $f \neq g$. ჩვენი სიტყვებით ამ შემთხვევას შეგვიძლია ამგვარი კომენტარი გავუკეთოთ, რომ ფუნქციათა ტოლობა ნიშნავს აბსოლუტურად ერთიდაიგივე შესაბამისობების მოცემას, სრულიად პატარა განსხვავების გარეშე. მაგრამ მივაქციოთ ყურადღება, რომ ჩვენი განსაზღვრით ტოლ ფუნქციებს არ მოეთხოვებათ ერთიდაიგივე მნიშვნელობათა არე ჰქონდათ (ლაპარაკია მნიშვნელობათა არეზე. გასაგებია, რომ მნიშვნელობათა სიმრავლე ტოლ ფუნქციებს ავტომატურად ერთიდაიგივე გამოუვათ, ამიტომაც ეს ფაქტი ცალკე სპეციალურად ტოლობის განსაზღვრაში არ მოგვიხსენებია). ამით ფაქტიურად ფუნქციის მოცემისას ჩვენ არ ვაკონკრეტებთ მის მნიშვნელობათა არეს. ეს არ არის ცალსახად მიღებული თვალსაზრისი, მაგრამ იგი სრულ თანადობაშია ფუნქციის ზუსტი მათემატიკური განსაზღვრიდან გამომდინარე პოზიციასთან.

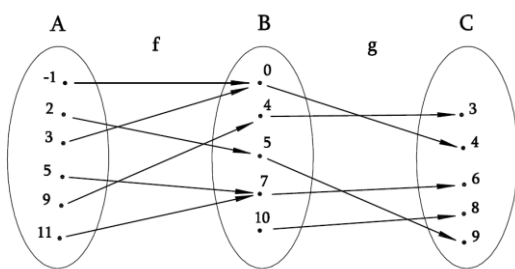
ფუნქციათა ტოლობის და მათი განსაზღვრის არის გააზრებასთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული ისეთი ცნებები როგორიცაა ფუნქციის შეზღუდვა და განვრცობა. ერთი შეხედვით ამ ცნებებში ახალი არაფერია და არც ღირს ხსენებად, მაგრამ მათი სწორი ცოდნა მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ზოგიერთი ფუნქციის წარმოდგენაში, კერძოდ შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების აგებაში. ვთქვათ მოცემული გვაქვს რაიმე ფუნქცია. თუ მის განსაზღვრის არიდან ამოვყრით რაიმე წერტილებს და დარჩენილ წერტილებში შევინარჩუნებთ ფუნქციის მნიშვნელობებს, მივიღებთ ამ ფუნქციის შეზღუდვას. თუკი პირიქით, განსაზღვრის არეს მივუერთებთ ახალ წერტილებს და მათაც შევუსაბამებთ რაიმე მნიშვნელობებს, მაშინ მივიღებთ მოცემული ფუნქციის განვრცობას. ფორმულების ენაზე ეს დამოკიდებულება ასე გამოიხატება. g ფუნქცია არის f ფუნქციის შეზღუდვა, თუკი $D_g \subset D_f$ და $g(x) = f(x)$ როცა $x \in D_g$. თუ g ფუნქცია არის f -ის შეზღუდვა, მაშინ f იქნება g -ს განვრცობა. ხშირად, როცა $A \subset D_f$, f -ის შეზღუდვას A -ზე აღვნიშნავთ $f|_A$ -თი. ე.ი. $f|_A(x) = f(x)$ როცა $x \in A$ და სხვა შემთხვევაში იგი განსაზღვრული არ არის. უნდა შევძლოთ

იმის დანახვაც, რომ ამ დროს A სიმრავლის ანასახი f ფუნქციით არის $f|_A$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ფუნქციის თემის დამუშავების ჩვენული სტრატეგია იმაში მდგომარეობს, რომ მარტივად, ნახ. 1-ზე გამოსახული ისრების მეშვეობით, ავხსნათ ფუნქციებთან დაკავშირებული ძირითადი ცნებები: ინექცია, „ზე“ და „ში“ ასახვები, ურთიერთცალსახა ასახვა, შექცეული ფუნქცია, ფუნქციათა კომპოზიცია. პირველი სამი ცნება შეიძლება რამოდენიმე ფრაზით ჩამოყალიბდეს, თუმცა მკითხველმა კარგად უნდა გაიაზროს ეს ცნებები და სათანადო სავარჯიშოების შესრულებით განიმტკიცოს მათი ცოდნა. $f: A \rightarrow B$ ასახვა არის ინექცია თუკი B -ს არც ერთ წერტილში არ შედის ორი ან მეტი ისარი (ნახ. 1-ზე გამოსახული ფუნქცია არ არის ინექცია, რადგან მაგალითად 7-ში შედის ორი ისარი), ანუ $f(x_1) \neq f(x_2)$ როცა $x_1 \neq x_2$. (გრაფიკულად ეს ნიშნავს, რომ ყოველი OX ღერძის პარალელური წრფე f -ის გრაფიკს კვეთს არაუმეტეს ერთი წერტილისა. რატომ?) ის არის „ზე“ ასახვა თუკი B -ს ყოველ წერტილში შედის ერთი მაინც ისარი (ნახ. 1-ზე არ გვაქვს „ზე“ ასახვა, რადგან 10-ში არ შედის ისარი), ანუ ნებისმიერი y -ისთვის B -დან არსებობს $x \in A$ -ს ისეთი რომ $f(x) = y$. წინააღმდეგ შემთხვევაში მას ჰქვია „ში“ ასახვა. თუ f არის ინექცია და „ზე“ ასახვაც მას ჰქვია ურთიერთცალსახა ფუნქცია ან ბიექცია. ცხადია, თუ A და B სასრული სიმრავლეებია და მათ შორის არსებობს ურთიერთცალსახა ასახვა, მაშინ ელემენტების რაოდენობა A და B სიმრავლეებში ერთიდაიგივეა. უფრო მარტივი ენით იგივე ფაქტი შეგვიძლია ამგვარად გამოვთქვათ, რომ თუკი წინასწარ ვიცით, რომ საკლასო ოთახში 20 სკამი დგას და გაკვეთილზე შესვლისას ვხედავთ, რომ ყველა სკამზე თითო მოსწავლე ზის, მაშინ მოსწავლეების რაოდენობათა დათვლა ცალკე აღარ არის საჭირო და პირდაპირ შეგვიძლია მივხედეთ, რომ ისენიც 20-ნი იქნებიან.

ფუნქციათა კომპოზიცია.

უკვე შეჩვეული ისრების ენაზე შეგვიძლია მარტივად ავხსნათ ფუნქციათა კომპოზიცია.



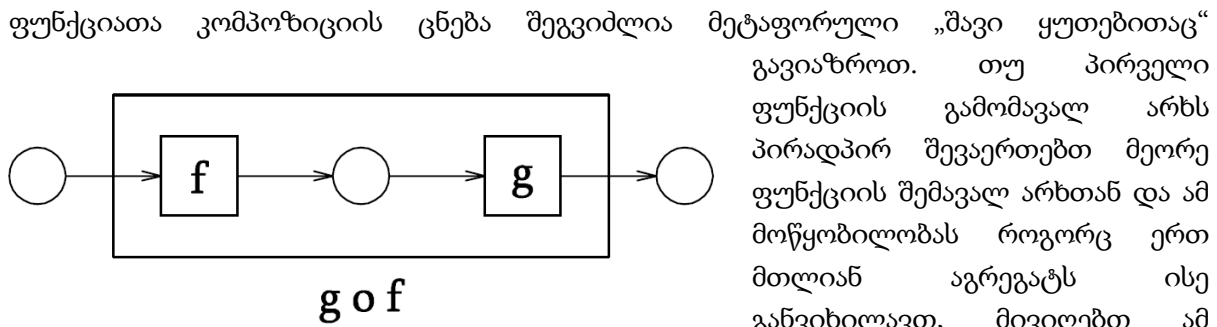
მოდით ნახ. 1-ზე განხილულ $f: A \rightarrow B$ ფუნქციასთან ერთად განვიხილოთ რაიმე $g: B \rightarrow C$ ფუნქცია და ისენი ერთ ნახატზე გამოვხატოთ. f და g ფუნქციების კომპოზიცია ნიშნავს, რომ A სიმრავლის წერტილები ჯერ f -ის ისრებით გადავლენ C -ში, ხოლო შემდეგ g -ს ისრებით გადავლენ C -ში და საბოლოოდ A სიმრავლის

ყოველი წერტილი იპოვის თავის მეწყვილეს C -ში. (მაგალითად 3 ჯერ გადავა 0-ში, ხოლო შემდეგ 4-ში, ე.ი. 3 საბოლოოდ გადავა 4-ში, 5-- 6-ში, 9--3-ში და ა.შ.). მაშასადამე f და g ფუნქციების კომპოზიცია არის ახალი ფუნქცია A -დან C -ში, რომელიც ზემოთ აღწერილი წესით მოქმედებს. ეს ფუნქცია ამგვარად ჩაიწერება $g \circ f$. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ეს ჩანაწერი შებრუნებულად მარჯვნიდან მარცხნივ იკითხება. ანუ იგი არის f -ის და g -ს კომპოზიცია და არა g -ს და f -ის. ამგვარი ჩაწერის მიზეზი იმით აიხსნება, რომ იგი ამარტივებს ფუნქციათა კომპოზიციის ზუსტ ჩანაწერს ფორმულების მეშვეობით

$$g \circ f(x) = g(f(x)). \quad (6)$$

თუ გავიხსენებთ $f(x)$ ჩანაწერის შინაარსს, მაშინ $g(f(x))$ აღნიშნავს g ფუნქციის მნიშვნელობას $f(x)$ წერტილში და (6) ფორმულით ფუნქციათა კომპოზიციის იმავე

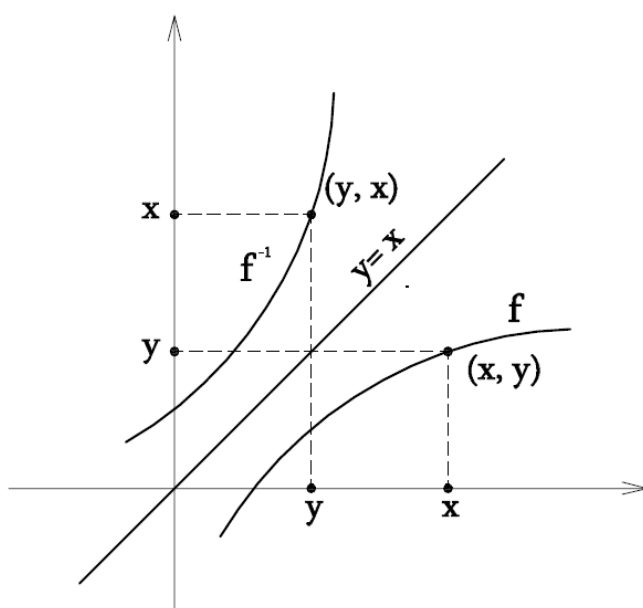
განსაზღვრას მივიღებთ, რაზეც მანამდე ვლაპარაკობდით. საზოგადოდ ნებისმიერად აღებული f და g ფუნქციებისთვის, თუკი f -ის მნიშვნელობათა სიმრავლე არ არის g -ს განსაზღვრის არის ქვესიმრავლე, $E_f \not\subset D_g$, f -ის და g -ს კომპოზიცია არ არსებობს რადგან ზემო აღნიშნული ხერხით f -ის განსაზღვრის არის ყოველი წერტილისათვის ვერ ვიპოვით მის მეწყვილეს კერძოდ ნახ. 7 გამოსახული ფუნქციებისათვის $f \circ g$ არ არსებობს. ეს მაგალითი კიდევ უფრო ცხადყოფს რომ ორი ფუნქციის კომპოზიციის განხილვისას ამ ფუნქციების თანმიმდევრობას არსებითი მნიშვნელობა აქვს. იოლად შეგვიძლია მოვიყვანოთ იმგვარი მაგალითიც, რომ f -ისა და g -ს კომპოზიციაც არსებობდეს და g -სა და f -ისაც, მაგრამ $g \circ f \neq f \circ g$.



ფუნქციათა კომპოზიციას. სქემატურად ეს ნახ. 8-ზეა გამოხატული. ამ სქემიდანაც ცხადია, რომ $E_f \subset D_g$ პირობა აუცილებელია, რათა ამ მოწყობილობამ გამართულად იმუშაოს და D_f -ის ყოველი წერტილის შეყვანის შემდეგ მოგვცეს გამომავალი მნიშვნელობა.

შევნიშნოთ, რომ თუ $f: A \rightarrow B$ ურთიერთცალსახა ფუნქციაა, მაშინ $f^{-1} \circ f = I_A$ და $f \circ f^{-1} = I_B$ სადაც I_A -თი აღნიშნული A -ზე განსაზღვრული იგივეური ფუნქცია (იგივეური ფუნქციით ყოველ წერტილს შეესაბამება საკუთარი თავი) და ანალოგიურად -- I_B -თი. ამ დამოკიდებულებების სამართლიანობა უშუალოდ უნდა გაიზაროს მკითხველმა, რითაც კიდევ უფრო განამტკიცებს თავად შექცეული ფუნქციებისა და ფუნქციათა კომპოზიციის შესახებ არსებულ ცოდნას.

თუ f და g ფუნქციები ფორმულითაა განსაზღვრული და გვთხოვენ $g \circ f$ ფუნქციის ფორმულით წარმოდგენას, მაშინ უშუალოდ (6) ფორმულით უნდა ვისარგებლოთ. მაგალითად თუ $f(x) = 2x + 5$ და $g(x) = \frac{1}{2}(x - 5)$ (იხ. (3) და (5)) მაშინ $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 5) = \frac{1}{2}((2x + 5) - 5) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$ როგორც ეს მოსალოდნელი იყო, რადგან როგორც ადრე ვნახეთ $g = f^{-1}$ (იხ. (5)).

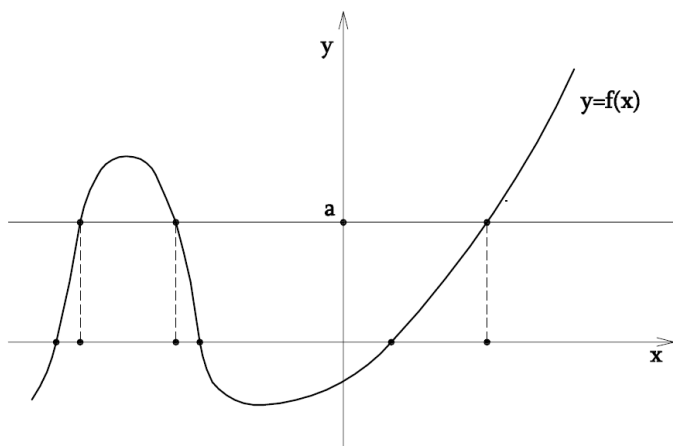


თუკი f (ინვეციური) ფუნქციის გრაფიკი საკოორდინატო სიბრტყეზეა წარმოდგენილი, მაშინ f^{-1} -ის გრაფიკი მიიღება f -ის ღერძული სიმეტრიით I და III მეოთხედებზე გამავალი ბისექტრისის მიმართ. მართლაც ამ სიმეტრიით OX ღერძი გადადის OY ღერძში და პირიქით OY ღერძი -- OX ღერძში, ასევე (x, y) წერტილი -- (y, x) -ში. ამიტომ, თუკი (x, y) ეკუთვნის f -ის გრაფიკს, რაც

როგორც გვახსოვს ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $y = f(x)$, გვექნება რომ მისი სიმეტრიული წერტილი (y, x) იქნება f^{-1} -ის გრაფიკზე, რადგან ამ დროს $x = f^{-1}(y)$. ამ გეომეტრიულად მოსახერხებელ ფაქტს ხშირად ვიყენებთ f^{-1} -ის გრაფიკის ასაგებად, როცა ცნობილია f -ის გრაფიკი. სანიმუშოდ ავაგოთ $y = 2x + 5$ და $y = \frac{x-5}{2}$ ფუნქციების გრაფიკები ერთიდაიმავე საკოორდინატო სისტემაში და ვანხოთ, რომ ისენი მართლაც ერთმანეთის სიმეტრიულია $y = x$ წრფის მიმართ.

ფუნქციებთან დაკავშირებული ამოცანები.

ფუნქციებისა და მათი გრაფიკების შესახებ უკვე დაგროვილი ცოდნის ფარგლებში და ამ ცოდნის განსამტკიცებლად უამრავი საინტერესო ამოცანა შეიძლება დავსვათ და ამოვხსნათ. მოდით ამ საკითხის განხილვით დავიწყოთ. $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილები, რატომ არის $f(x) = 0$ განტოლების ამონახსნები? (მაგალითად $y = x^2 - x - 6$ ფუნქციის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია $(-2; 0)$ და $(3; 0)$ და მართლაც თუკი სათანადო ფორმულებით ამოვხსნით $x^2 - x - 6 = 0$ განტოლებას, მივიღებთ პასუხებს $x_1 = -2$ და $x_2 = 3$.) თუ ამ კითხვაზე პასუხის გაცემა არ შეგვიძლია, ეს ნიშნავს, რომ კიდევ ერთხელ უფრო დაკვირვებით უნდა წავიკითხოთ გადმოცემული მასალა. ე.ი. გადაგვახილავს რას ნიშნავს განტოლების ამონახსნი (სამწუხაროდ ხშირად, იმ მოსწავლეებსაც კი,



რომლებსაც შეუძლიათ განტოლებათა ამოხსნა, ყურადღების მიღმა რჩებათ რას ეწოდება განტოლების ამონახსნები). ან სათანადო ყურადღება არ მივაქციეთ f ფუნქციის გრაფიკით როგორ იძებნება რაიმე x წერტილის შესაბამისი $f(x)$ წერტილი. ამონახსნი ხომ სწორედ ისეთ x_0 რიცხვს ეწოდება, რომელიც განტოლებას გადააქცევს

ჭეშმარიტ ტოლობად, როცა მას ჩავსვამთ ცვლადის მაგივრად, ე.ი. $f(x_0) = 0$. მეორეს მხრივ რიცხვის ჩასმით ცვლადის მაგივრად მივიღებთ ფუნქციის მნიშვნელობას ამ რიცხვში, ე.ი. $f(x_0)$ -ს. მაშასადამე, ამონახსნში ფუნქციის მნიშვნელობა უდრის 0 -ს და თავის მხრივ ეს ნიშნავს, რომ $(x_0; 0)$ ძეკს ფუნქციის გრაფიკზე. რაღა თქმა უნდა ის ძეკს OX ღერძზეც და მაშასადამე ეკუთვნის გრაფიკისა და OX ღერძის თანაკვეთას.

ანალოგიური მსჯელობის ჩატარებით უნდა შეგვეძლოს $f(x) = a$ განტოლების გრაფიკულად ამოხსნა, სადაც a რაიმე მოცემული რიცხვია. ცხადია ამისთვის ჯერ უნდა ვიპოვოთ $(0; a)$ წერტილზე გამავალი OX ღერძის პარალელური წრფის გადაკვეთის წერტილები გრაფიკთან და შემდეგ ეს წერტილები დავაგეგმილოთ OX ღერძზე. გრაფიკის მიხედვით უნდა შეგვეძლოს $f(x) > 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) \geq a$, და ა.შ. ტიპის უტოლობების ამოხსნა. აგრეთვე $f(x) = g(x)$, ან $f(x) \geq g(x)$ ტიპის განტოლებების და უტოლობების ამოხსნაც.

შემდეგი ტიპი ამოცანებისა წარმოიქმნება, როდესაც ვიცით $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი და გვინდა ავაგოთ ჩამოთვლილი ოთხი ფუნქციიდან რომელიმეს გრაფიკი: ა) $y = f(x) + a$,

ბ) $y = f(x + a)$, გ) $y = a \cdot f(x)$ და დ) $y = f(ax)$. (აქ a რაიმე რიცხვია, რომელიც შეიძლება იყოს როგორც დადებითი ისე უარყოფითი.) ჩამოთვლილი ფუნქციების გრაფიკების აგებისას ისევ და ისევ კარგად უნდა გავიხსენოთ თუ რას ნიშნავს, რომ სიბრტყის მოცემული წერტილი ეკუთვნის მოცემულ გრაფიკს. თუ ვიცით, რომ $(x; y)$ წერტილი ეკუთვნის $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს, მაშინ უშუალოდ შეგვიძლია მივუთითოთ ის ოთხი წერტილი, რომლებიც შესაბამისად ეკუთვნიან ზემოთ დაწერილი ოთხი ფუნქციის გრაფიკებს ა) $(x; y + a)$ ბ) $(x - a; y)$ გ) $(x; ay)$ დ) $(\frac{x}{a}; y)$. ეხლა თუ გავითვალისწინებთ, რომ $(x; y)$ გრაფიკის ნებისმიერი წერტილია და დავაკვირდებით რა მიმართებაშია ეს წერტილი ამ ჩამოთვლილ ოთხ წერტილთან, მივიღებთ დასმულ ამოცანაზე პასუხს. ჩამოვწეროთ ეს პასუხები იმ დაშვებაში, როცა $a > 1$. კერძოდ, შესაბამისი ფუნქციის გრაფიკი: ა) აიწევს a -თი ზევით, ბ) გაიწევს a -თი მარცხნივ, გ) გაიწელება a -ჯერ OY ღერძის მიმართულებით, დ) შეიკუმშება a -ჯერ OX ღერძის მიმართულებით. შევეცადოთ კარგად გავიაზროთ ეს სიტუაციები და თავად გავცეთ სწორი პასუხი ამ ამოცანას a -ს დარჩენილი მნიშვნელობებისათვის, რითაც კიდევ უფრო განვიმტკიცებთ ჩვენს ცოდნას ფუნქციების შესახებ.

ფუნქციის ზუსტი განსაზღვრა.

სანამ ფუნქციის ზუსტ განსაზღვრას შევუდგებოდეთ, *სიმრავლის* ცნება გავიხსენოთ. სიმრავლე სწორედაც უმარტივესი, ანუ საწყისი ცნებაა და მისი ზუსტი მათემატიკური განსაზღვრება არ არსებობს. ჩვენ შეგვიძლია მხოლოდ ჩვენი სიტყვებით, მაგრამ არა ორაზროვნად, ავხსნათ ეს მცნება რათა ერთიდაიგივე თვალსაზრისი ჩამოგვიყალიბდეს მის შესახებ. „*სიმრავლე ეს არის რაღაც ობიექტების ერთობლიობა, გროვა განხილული როგორც ერთი მთლიანი*“. თვითონ ამ ობიექტებს სიმრავლის ელემენტებს ვუწოდებთ (ელემენტის, როგორც შემადგენელი ნაწილის გაგებით). იგულისხმება, რომ ეს ობიექტები თავისთავად არსებობენ და მათი ერთი დაკვირვების სფეროში მოქცევით, ანუ გარკვეული ლოგიკური ნაბიჯით, ვღებულობთ სიმრავლეს. (ამგვარი თვალსაზრისით აიხსნება ის ფაქტი, რომ სიმრავლეში დაუშვებელია რაიმე ელემენტი ორჯერ ან მეტჯერ მეორდებოდეს). ეს თვალსაზრისი დაგვეხმარება იმის მიხედვარა, რომ მოცემული სიმრავლეებიდან (სიმრავლის მოცემა ნიშნავს, რომ ნებისმიერ ელემენტზე უნდა შეგვეძლოს თქმა ეკუთვნის თუ არა ამ სიმრავლეს) ახალი სიმრავლეების შედგენა, როგორიცაა *გაერთიანება, თანაკვეთა, დეკარტული ნამრავლი* და სხვ. სწორედაც ამგვარ ლოგიკურ ნაბიჯებს წარმოადგენენ.

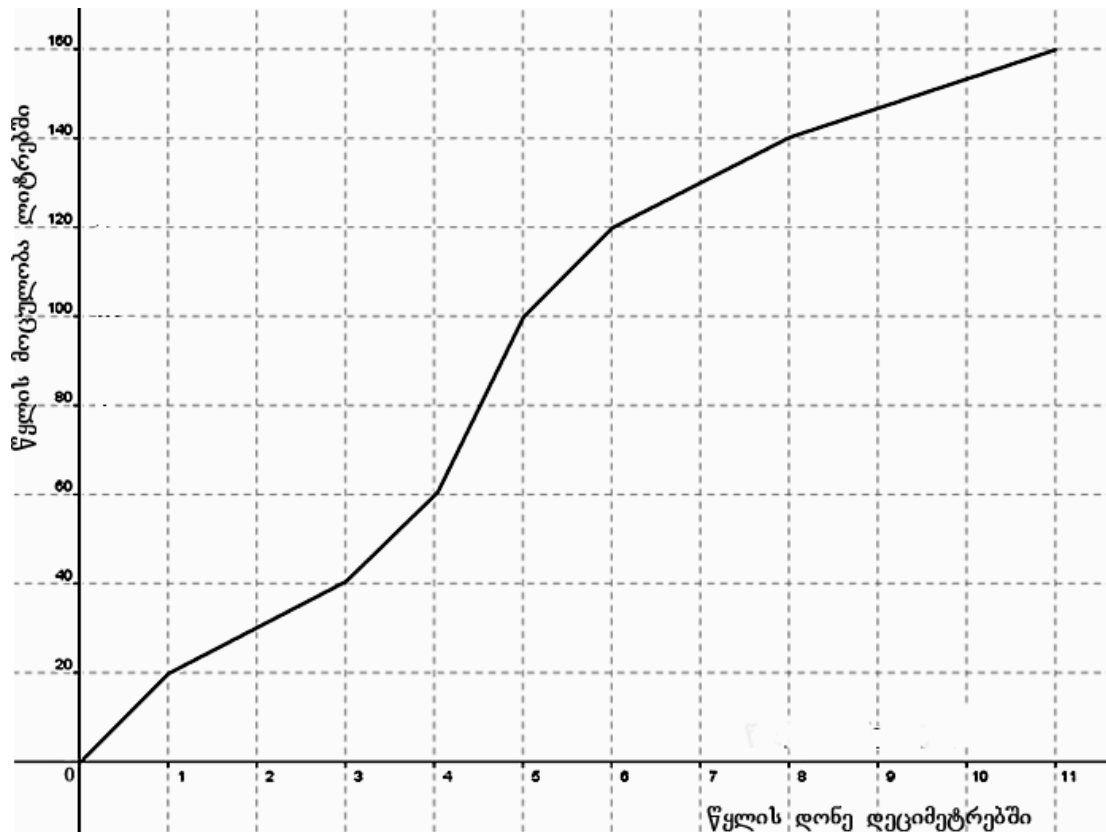
ფუნქციის ცნების განსაზღვრისთვის ჩვენ დაგვჭირდება დეკარტული ნამრავლის გახსენება და ამიტომაც დაწვრილებით შევჩერდებით მის განსაზღვრაზე. ჩვენ მას ძალიან ხშირად ვაწყდებით მათემატიკაში, ასე რომ შეიძლება მხოლოდ მისი სახელი აღმოჩნდეს მკითხველისთვის უცნობი ან დავიწყებული.

A და B სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი ეწოდება ყველა შესაძლო დალაგებული წყვილების სიმრავლეს, სადაც წყვილის პირველი ელემენტი აიღება A -დან, ხოლო მეორე -- B -დან, ე.ი. $A \times B = \{(a; b): a \in A, b \in B\}$ მაგალითად, თუკი $A = \{-1, 0, 2\}$ და $B = \{1, 2\}$ მაშინ $A \times B = \{(-1; 1), (-1; 2), (0; 1), (0; 2), (2; 1), (2; 2)\}$. ამ განსაზღვრაში რთული არაფერია. უბრალოდ ყურადღება უნდა მივაქციოთ იმ ფაქტს, რომ ორი სიმრავლიდან შევადგინეთ ერთი, მაგრამ განსხვავებული ბუნების მქონე ელემენტებისგან (წყვილი, როგორც ერთი ობიექტი, შედის ელემენტად დეკარტულ ნამრავლში) შემდგარი, სიმრავლე. დეკარტული ნამრავლის კლასიკური მაგალითია საკოორდინატო სიბრტყე, რომელიც წარმოადგენს რიცხვთა სიმრავლის თავის თავზე დეკარტულ ნამრავლს. მართლაც ყოველი წერტილი ჩვენ

გაიგივებული გვაქვს რიცხვთა დალაგებულ წყვილთან, ანუ დეკარტული ნამრავლის ელემენტთან და პირიქით, რიცხვთა ნებისმიერი წყვილისთვის გვაქვს სათანადო წერტილი საკოორდინატო სიბრტყეზე. დეკარტული ნამრავლის შედგენით ჩვენ წინასწარ ვიხილავთ ყველა შესაძლო დაწყვილებებს, რაც აქტიურად მონაწილეობდა ფუნქციის ცნების ჩამოყალიბებისას. ამიტომ გასაკვირი არაა, რომ კავშირები რომლებსაც ფუნქცია ამყარებს ელემენტებს შორის და რომლებიც ჩვენ სხვა ტერმინებთან ერთად „დაწყვილებითაც“ მოვიხსენიეთ, ზუსტ ფორმას სწორედ დეკარტული ნამრავლის სახით იძენს. მაშასადამე ფუნქციის ზუსტი განსაზღვრა ამგვარ სახეს იღებს: „ $f: A \rightarrow B$ ფუნქცია ეწოდება $A \times B$ -ის ისეთ ქვესიმრავლეს (ამ ქვესიმრავლეს იმავე f -ით აღვნიშნავთ, რამაც გაუგებრობა არ უნდა გამოიწვიოს), რომელსაც შემდეგი თვისება აქვს, რომ ყოველი a ელემენტისთვის A -დან არსებობს ერთადერთი ისეთი b ელემენტი B -დან, რომლისთვისაც $(a; b) \in f$ “. ამ განსაზღვრით ფუნქციის არავითარი თვისობრივი სიახლე არ შემოგვიტანია, უბრალოდ დავაფუძნეთ ეს ცნება სიმრავლეთა თეორიით მათემატიკაში შექმნილ მკაცრ ფუნდამენტს. როგორც ობიექტი, ფუნქცია აღმოჩნდა სიმრავლე, თუმცა უფრო რთული ბუნების ვიდრე ეს მისი განსაზღვრის არეა ან მნიშვნელობათა სიმრავლე. კერძოდ, რა ელემენტებისგანაც შედგება განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე, თვითონ ფუნქცია შედგება ამ ელემენტების დაწყვილებით მიღებული ელემენტებისგან. მოსწავლეებისთვის კარგი სავარჯიშო იქნება ფუნქციის ამ ახალი განსაზღვრის ტერმინებში გამოვთქვათ რას ნიშნავს, მაგალითად, ურთიერთცალსახა ფუნქცია, შებრუნებული ფუნქცია და ა.შ.

ამოცანები:

1. ჭურჭელს ავსებენ წყლით. ნახაზზე გამოსახულია ჭურჭელში ჩასხმული წყლის მოცულობის (ლიტრებში) დამოკიდებულება ჭურჭელში წყლის დონეზე (დეციმეტრებში).



რამდენი ლიტრი იყო წყლის მოცულობა, როდესაც წყლის დონე იყო 6 დეციმეტრი?

2. ბანკში შეტანილი გვაქვს 100 ლარი, რომელსაც შეტანიდან ყოველი წლის თავზე ემატება თავდაპირველად შეტანილი თანხის 10 პროცენტის ტოლი თანხა. ამ შემთხვევაში, შეტანიდან n წლის თავზე ბანკში ანგარიშზე დაგროვილი თანხა

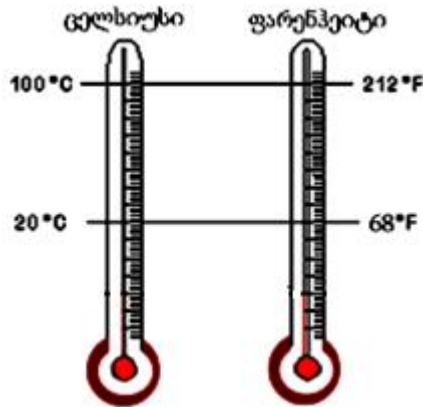
$$100 \cdot \left(1 + \frac{n}{10}\right)$$

გამოითვლება ფორმულით $100 \cdot \left(1 + \frac{n}{10}\right)$. ამ ფორმულის მიხედვით, რა თანხა იქნება ანგარიშზე 2 წლის თავზე?

3. მოძრაობის დაწყებისას ავტომობილის საწვავის ავზში ასხია 16 ლიტრი საწვავი. ავზში დარჩენილი საწვავის მოცულობის f (ლიტრებში) დამოკიდებულება გავლილ s მანძილზე (კილომეტრებში) გამოისახება ფუნქციით: $f(s) = 16 - 0.08s$. რამდენი კილომეტრის გავლის შემდეგ დაიცლება ავზი?
4. ერთი მაისურის შეკერვა საწარმოს უჯდება a ლარი, მასზე სურათის დახატვა უჯდება b ლარი. საწარმოს მოგება არის სხვაობა მაისურების გაყიდვით მიღებულ თანხასა და მაისურების დამზადებაზე დახარჯულ თანხას შორის. საწარმომ დაამზადა 100 მაისური და გაყიდა თითოეული c ლარად. რომელი გამოსახულება შეიძლება გამოვიყენოთ საწარმოს მოგების გამოსათვლელად?

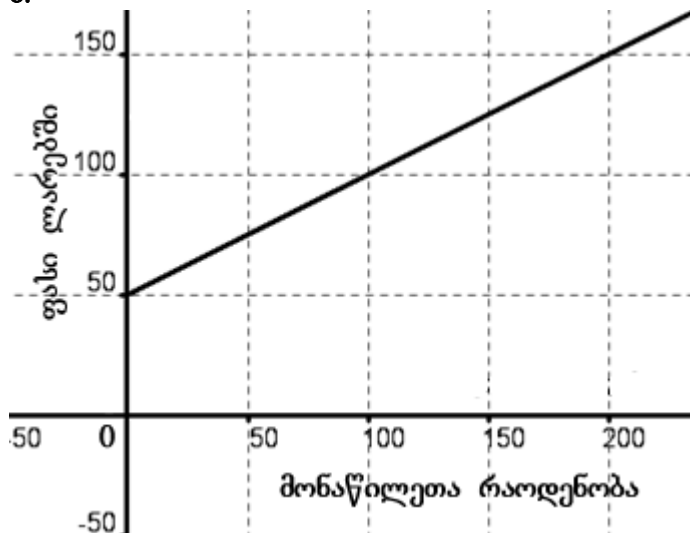
- A. $100(c - a)$
 B. $100(c - b)$
 C. $100(c - a - b)$
 D. $100(a + b - c)$

5.



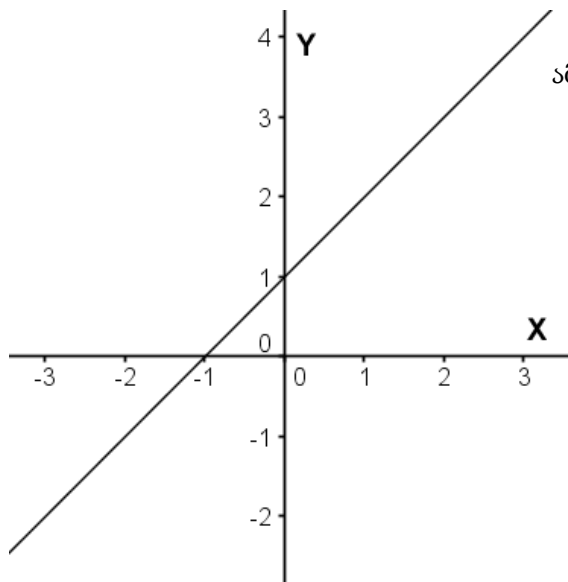
როგორც ცნობილია, არსებობს ტემპერატურის საზომი სხვადასხვა სკალა, მათ შორის ცელსიუსის და ფარენჰეიტის. თუ ცელსიუსით გაზომილ ტემპერატურას აღვნიშნავთ C ასოთი, ხოლო ფარენჰეიტით გაზომილ ტემპერატურას აღვნიშნავთ F ასოთი, მაშინ ცელსიუსით გაზომილი ტემპერატურის ფარენჰეიტში გადასაყვანად შეიძლება გამოვიყენოთ ტოლობა: $C = \frac{5}{9}(F - 32^0)$. რისი ტოლია ტემპერატურა ცელსიუსის სკალით, როდესაც ტემპერატურა ფარენჰეიტის სკალით ტოლია 32 გრადუსის?

6.



საკონფერენციო ცენტრის კედელზე გამოკრულია დიაგრამა. მასზე ნაჩვენებია ცენტრის 1 დღით დაქირავების ღირებულების დამოკიდებულება კონფერენციის მონაწილეების რაოდენობაზე (რომელიც წრფივია). რა ეღირება საკონფერენციო ცენტრის დაქირავება 120 მონაწილესათვის?

7.



რომელი ფუნქციის გრაფიკია გამოსახული ამ ნახაზზე?

- A. $y = x + 1$
- B. $y = x - 1$
- C. $y = 1 - x$
- D. $y = x$

8. ქვემოთ ჩამოთვლილ ფუნქციებს შორის რომელს აქვს შემდეგი თვისება $f(0) = 0$?

- A. $f(x) = x^3$
- B. $f(x) = |x + 1|$
- C. $f(x) = 2x - 12$
- D. $f(x) = x + 1$

9. როგორც ცნობილია, ვერტიკალურად ზევით გასროლილი სხეულის სიჩქარე თანდათანობით კლებულობს. სხეულის სიჩქარე (მეტრი წამში) t წამის შემდეგ გამოითვლება ფორმულით $u - 9.8t$. ამ გამოსახულებაში u არის სხეულის სიჩქარე გასროლის მომენტში. ვთქვათ, სხეული ვერტიკალურად გაისროლეს 100 მეტრი წამში სიჩქარით. რამდენი წამის შემდეგ იქნება სხეულის სიჩქარე 2 მ/წმ - ის ტოლი?

10. ბანკში შეტანილი გვაქვს თანხა, რომელსაც შეტანიდან ყოველი წლის თავზე ემატება თავდაპირველად შეტანილი თანხის p პროცენტის ტოლი თანხა. იმ შემთხვევაში, თუ შეტანილი თანხის რაოდენობა 100 ლარია, შეტანიდან n წლის თავზე

დაგროვილი თანხა გამოითვლება ფორმულით $100 \cdot \left(1 + \frac{pn}{100}\right)$. თუ $p = 10$, ამ

ფორმულის მიხედვით, რამდენი ლარი იქნება ანგარიშზე შეტანიდან $n = 2$ წლის თავზე?

11. ბანკში შეტანილი გვაქვს თანხა, რომელსაც რომელსაც შეტანიდან ყოველი წლის თავზე ემატება ანგარიშზე არსებული თანხის P პროცენტის ტოლი თანხა. იმ შემთხვევაში, თუ შეტანილი თანხის რაოდენობას აღვნიშნავთ M - ით, მაშინ შეტანიდან n წლის თავზე დაგროვილი თანხა გამოითვლება ფორმულით $M \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$. ვთქვათ, ბანკში შეტანილი თანხაა $M = 200$ ლარი, ხოლო $P = 10$. რა თანხა გვექნება ანგარიშზე შეტანიდან $n = 2$ წლის თავზე?
12. სატელეფონო საუბრის ხარჯების დაფარვისას მომხმარებელი ყოველთვიურად იხდის სააბონენტო გადასახადს 5 ლარს და დამატებით წუთობრივ გადასახადს - წუთში 2 თეთრს. რომელი ფუნქცია გამოსახავს თვის ბოლოს გადასახდელი თანხის დამოკიდებულებას საუბრის ხანგრძლივობაზე? (ვთქვათ, P არის გადასახდელი თანხა თეთრებში, ხოლო x არის საუბრის დრო წუთებში)

A. $P(x) = 2x + 500$

B. $P(x) = 5x + 2$

C. $P(x) = 500x + 2$

D. $P(x) = 2x + 5$

IX. მონაცემთა ანალიზის საფუძვლების სწავლების შესახებ.

§1. მონაცემთა წარმოდგენა

მონაცემები. მონაცემთა ორგანიზაცია ცხრილების საშუალებით.

სტატისტიკა წარმოადგენს მეცნიერებას მონაცემების შეგროვების, დამუშავების, ანალიზისა და მათზე დაყრდნობით, დასკვნების გაკეთების შესახებ. სტატისტიკური კვლევა მონაცემთა შეგროვებით იწყება. მონაცემთა შეგროვება სხვადასხვა მეთოდითაა შესაძლებელი. ესენია: დაკვირვება, ანკეტური და საარქივო მონაცემები მოპოვება, გამოკითხვა, ექსპერიმენტი. სტატისტიკური კვლევის მეორე ეტაპი მიღებული მონაცემების დამუშავებაა, რაც მონაცემთა კლასიფიკაციას და ორგანიზაციას გულისხმობს.

მონაცემთა ორგანიზაცია მათ მოწესრიგებას, დალაგებას, დაჯგუფებას და თვალსაჩინო წარმოდგენას გულისხმობს. სწორად დამუშავებული და თვალსაჩინოდ წარმოდგენილი მონაცემები საფუძვლიანი ანალიზისა და დასკვნების გაკეთების საშუალებას იძლევა. მონაცემთა თვალსაჩინოდ წარმოდგენის ერთ-ერთი მეთოდია მათი ჩაწერა ცხრილების სახით. ამგვარ ამოცანებში ინფორმაცია მოცემულია ცხრილის სახით. ხშირად, საჭიროა

სათანადო ინფორმაციის მოძიება ცხრილში და შესაბამისი დასკვნის გამოტანა ასეთი სახით მოცემული მონაცემების საფუძველზე.

მაგალითი. ვთქვათ, ჩვენს წინაშეა ერთ-ერთი სამშობიარო სახლის ახალშობილთა რეგისტრაციის ანკეტა:

თარიღი	სახელი	სქესი	წონა (კგ)
05.06.2013	გიორგი	მამრ.	3,5
05.06.2013	გვანცა	მდედრ.	3
06.06.2013	მარიამი	მდედრ.	2,8
06.06.2013	დავითი	მამრ.	4
06.06.2013	მარიამი	მდედრ.	3,5
08.06.2013	ლაშა	მამრ.	3,5
09.06.2013	ნინო	მდედრ.	4
09.06.2013	გიორგი	მამრ.	3
10.06.2013	მარიამი	მდედრ.	3,5
10.06.2013	დავითი	მამრ.	4
11.06.2013	ნინო	მდედრ.	2,8
11.06.2013	გიორგი	მამრ.	3
11.06.2013	მარიამი	მდედრ.	4
11.06.2013	ქეთევანი	მდედრ.	3,5

ამ მონაცემებზე დაყრდნობით არ გაგვიჭირდება პასუხი გავცეთ შეკითხვებს:

1. რომელი სახელი იყო ყველაზე პოპულარული ამ პერიოდისთვის?
2. რომელ დღეს დაიბადა ყველაზე მეტი ბავშვი?
3. ახალშობილთა რამდენი პროცენტია ვაჟი?
4. რამდენს იწონის, საშუალოდ, ახალშობილი?
5. სულ რამდენი სახელი იყო გამოყენებული?

თუ მოვახდენთ მონაცემთა კლასიფიკაციას, შესაბამისი თვისობრივი ან რაოდენობრივი ნიშნის მიხედვით და დავაჯგუფებთ, მაშინ კითხვებზე პასუხის გაცემა კიდევ უფრო გაგვიადვილდება. მაგალითად, თუ ჩვენ გვაინტერესებს ახალშობილთა სქესის განაწილება, მაშინ შევადგენთ ცხრილს, რომელიც შედგენილი იქნება თვისობრივი (სქესის) ნიშნის მიხედვით:

სქესი	ახალშობილთა რაოდენობა
მამრ.	6
მდედრ.	8

ანალოგიური ცხრილი შეგვიძლია შევადგინოთ სახელების პოპულარობის გამოვლენისა და დღეების მიხედვით ახალშობილთა განაწილებისთვის.

სახელი	ახალშობილთა რაოდენობა	თარიღი	ახალშობილთა რაოდენობა
გიორგი	3	05.06.2013	2
გვანცა	1	06.06.2013	3
მარიამი	4	07.06.2013	0
დავითი	2	08.06.2013	1
ლაშა	1	09.06.2013	2
ნინო	2	10.06.2013	2
ქეთევანი	1	11.06.2013	4

ამ ცხრილებიდან თვალნათლივ ჩანს, რომ სულ შვიდი სახელი იქნა გამოყენებული და ყველაზე პოპულარული სახელია მარიამი, ხოლო ყველაზე მეტი ბავშვი 11 ივნისს დაიბადა.

შევადგინოთ ცხრილი, რომელიც ახალშობილთა წონის განაწილებას გამოსახავს. ამ შემთხვევაში ვახდენთ თავიდან მოცემული საანკეტო მონაცემების კლასიფიკაციას რაოდენობრივი ნიშნის – წონის მიხედვით. მოვახდინოთ ამ მონაცემთა ორგანიზება ამისათვის

1. ამოვწეროთ მონაცემები: 3,5; 3; 2,8; 4; 3,5; 3,5; 4; 3; 3,5 4; 2,8; 3,5; 4; 3,5.
2. დავალაგოთ ზრდის მიხედვით: 2,8; 2,8; 3; 3; 3; 3,5; 3,5; 3,5; 3,5; 3,5; 4; 4; 4; 4.
- 3 შევადგინოთ სიხშირეთა ცხრილი.
4. ავაგოთ წერტილოვანი დიაგრამა ან სიხშირეთა პოლიგონი.

წონა	ახალშობილთა რაოდენობა
2,8	2
3	3
3,5	5
4	4

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ი . მოცემულია 10 ადამიანის წონისა და სიმაღლის მონაცემების ცხრილი:

№	სიმაღლე (სმ)	წონა (კგ)	სქესი	ასაკი
1	182	95	მამრ.	34
2	170	69	მდედრ.	26
3	167	78	მდედრ.	43
4	181	84	მამრ.	21
5	178	90	მამრ.	28
6	157	47	მდედრ.	18

7	189	98	მამრ.	33
8	162	69	მდედრ.	26
9	165	64	მდედრ.	22
10	173	80	მამრ.	20

უპასუხეთ შეკითხვებს:

1. რამდენი მამაკაცის სიმაღლეა 180 სმ-ზე მეტი?

2. რამდენი ქალბატონის სიმაღლეა 170 სმ-ზე ნაკლები?

3. არის თუ არა სამართლიანი წინადადება: მამაკაცთა წონა ყოველთვის მეტია ვიდრე სხვაობა მის სიმაღლესა და 100 სმ-ს შორის.

4. არის თუ არა სამართლიანი წინადადება: ქალბატონთა წონა ყოველთვის ნაკლებია ვიდრე სხვაობა მის სიმაღლესა და 100 სმ-ს შორის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ მოცემულია ერთ დღეს აეროპორტიდან გაფრენილი და ჩამოფრენილი ადამიანების რაოდენობების მონაცემები ცხრილის საშუალებით:

გაფრენის მიმართულება	პარიზი	მილანი	პრაღა	კიევი
გაფრინდა	212	145	295	320
ჩამოფრინდა	188	165	286	301

ვუპასუხოთ შეკითხვებს

1. რამდენი ადამიანი გაფრინდა სულ აეროპორტიდან და რამდენი ჩამოფრინდა ამ დღეს?

2. რომელი მიმართულებითაა ყველაზე ინტენსიური ფრენები?

3. რამდენით აღემატება მილანიდან ჩამოფრენილი მგზავრების რაოდენობა იმავე მიმართულებით გაფრენილ მგზავრთა რაოდენობას?

4. რამდენია დიაპაზონი გაფრენილ მგზავრთა რაოდენობების განაწილებაში? რამდენია ჩამოფრენილთა შორის?

1. სულ გაფრინდა 972 ადამიანი, ჩამოფრინდა 940;

2. კიევის მიმართულებით;

3. 20-ით;

4. $320-145=75$, $301-165=36$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოცემულია მოსწავლეთა ნიშნების განაწილება ერთ-ერთ საგანში სემესტრის ბოლოს:

მიღებული შეფასება	5	6	7	8	9	10
მოსწავლეთა რაოდენობა	2	7	6	8	4	3

ვუპასუხოთ შეკითხვებს:

1. რამდენი მოსწავლეა შეფასებული?

2. რამდენი პროცენტია იმ მოსწავლეთა რაოდენობა, რომლებმაც მიიღეს უმაღლესი შეფასება?

3. რამდენი პროცენტია იმ მოსწავლეთა რაოდენობა, რომლებმაც მიიღეს უმდაბლესი შეფასება?

4. რომელი შეფასებაა ყველაზე ხშირი?

5. რამდენით მეტია იმ მოსწავლეთა რაოდენობა, რომლებსაც 8 და მეტი აქვთ შეფასებად, იმ მოსწავლეებზე, რომლებსაც უფრო დაბალი შეფასება აქვთ?

1. 30 მოსწავლე;

2. 10%;

3. $6\frac{2}{3}\%$;

4. 8;

5. თანაბარია.

მაგალითი. ცხრილში მოცემულია, ერთი კილოგრამი ბოსტნეულის საშუალო ფასი წლების განმავლობაში, ზაფხულის სეზონზე

	2009	2010	2011	2012	2013
პომიდორი	0,8	0,9	0,6	1,1	1,0
კიტრი	0,6	0,6	0,7	0,8	0,8
კომბოსტო	0,3	0,5	0,4	0,6	0,4
ჭარხალი	0,8	0,8	0,7	0,7	0,7
ხახვი	0,5	0,7	0,6	0,8	0,6
კარტოფილი	1,0	0,9	0,8	1,2	1,0
წიორი	2,1	2,3	2,0	2,6	2,8
კაკალი	12,0	17,0	15,0	22,0	20,0

ვუპასუხოთ კითხვებს:

1. რა ღირდა ჭარხალი 2011 წლის ზაფხულში?

2. რომელი ბოსტნეულის ფასი არ შემცირებულა ამ წლების განმავლობაში?

3. რომელ წელს ჰქონდა ყველაზე დაბალი ფასი წიორს?

4. რას უდრის ხახვის ფასების დიაპაზონი?

5. რომელ წელს არ იყო პომიდორის ფასი კიტრის ფასზე მაღალი?

6. რომელ წელს აღემატებოდა კარტოფილის ფასი კომბოსტოს ფასს 2,5-ჯერ?

1. 70 თეთრი;

2. კიტრის ფასი არ შემცირებულა;

3. 2011 წელს;

4. 0,8-0,5=0,3;

5. 2011 წელს;

§2. დიაგრამები

მონაცემთა წარმოდგენა. წრიული და სვეტოვანი დიაგრამები.

თვისობრივი ან რაოდენობრივი მონაცემების თვალსაჩინო წარმოდგენისათვის სარგებლობენ სვეტოვანი ან წრიული დიაგრამებით. წინა პარაგრაფში განხილული სამშობიარო სახლის მონაცემების მაგალითისათვის ამ დიაგრამებს შემდეგი სახე აქვთ:

