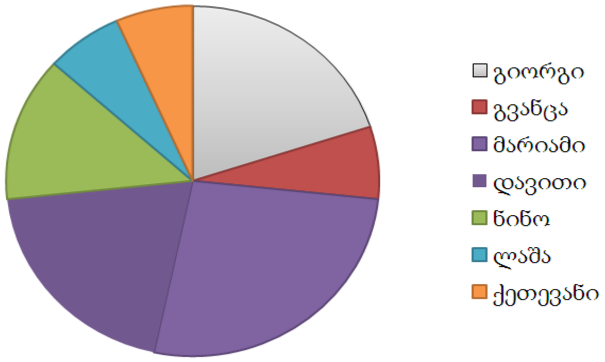
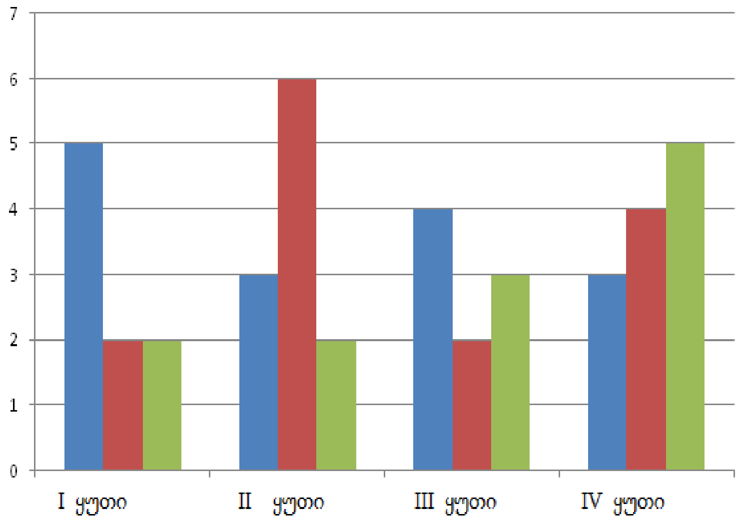


ჩვენ გავეცანით მონაცემების თვალსაჩინოდ წარმოდგენის საშუალებების (დიაგრამები და ცხრილები) აგების მეთოდებს. ხშირად მონაცემები მოცემულია ცხრილებისა და დიაგრამების საშუალებით, ამიტომ, საჭიროა, ვიცოდეთ ცხრილებისა და დიაგრამების გამოყენება მონაცემების გასაანალიზებლად, ანუ ვიცოდეთ, ცხრილებისა და დიაგრამების "წაკითხვა". დიაგრამების გასაანალიზებლად (წასაკითხად), პირველ რიგში, ყურადღება უნდა გამახვილდეს სკალაზე.

მაგალითი. მოცემულია ყუთების მიხედვით სამი ფერის ბურთების რაოდენობათა დიაგრამა.



დიაგრამის მიხედვით დავადგინოთ:

1. რომელ ყუთშია ლურჯი და წითელი ბურთების რაოდენობა ყველაზე მეტი?

ა) I -ში; ბ) III-ში; გ) IV -ში; დ) II -ში.

დიაგრამიდან ვგებულობთ: პირველ ყუთში არის 2 მწვანე, 2 წითელი და 5 ლურჯი ბურთი; მეორე ყუთში არის 2 მწვანე, 6 წითელი და 3 ლურჯი ბურთი; მესამეში – 3 მწვანე, 2 წითელი და 4 ლურჯი ბურთი; მეოთხეში – 5 მწვანე, 4 წითელი და 3 ლურჯი ბურთი. შესაბამისად, გვაქვს ლურჯი და წითელი ბურთების რაოდენობა I ყუთში – 7; II – 9; III – 6; IV – 7. პასუხი: დ).

2. მე-2 ყუთში მოთავსებული წითელი ბურთების რაოდენობა რამდენი პროცენტითაა მეტი პირველი ყუთის წითელი ბურთების რაოდენობაზე?

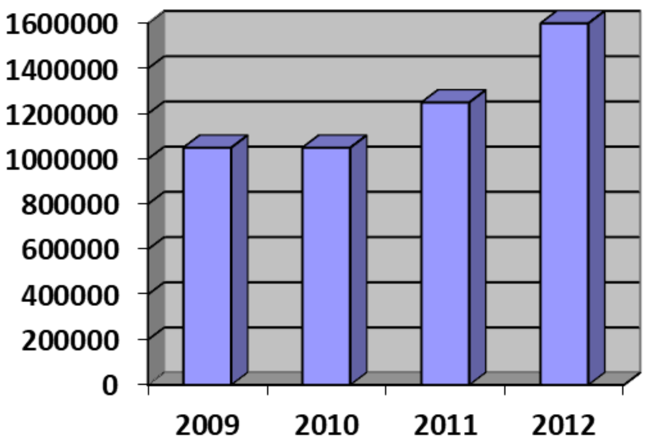
ა) 200% -ით; ბ) 20% -ით; გ) 30% -ით; დ) $\frac{100}{3}$% -ით.

მე-2 ყუთში არის 6, ხოლო პირველში – 2 წითელი ბურთი. 6 არის 4-ით მეტი 2-ზე. დავწეროთ პროპორცია

2-ს შეესაბამება 100%
4-ს ————— $x = 200\%$.
აქედან $x = 200\%$. პ ა ს უ ხ ი : ა).

3. რომელ ყუთშია წითელი ბურთების მეტი წილი?
ა) I -ში; ბ) III- ში; გ) II -ში; დ) IV -ში.
ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად ყოველ ყუთში წითელი ბურთის რაოდენობა გავყოთ იმავე ყუთში ყველა ბურთის რაოდენობაზე, გვექნება: პირველ ყუთში წითელი ბურთების წილი არის $\frac{2}{9}$; მეორეში – $\frac{6}{11}$; მესამეში – $\frac{2}{9}$; მეოთხეში – $\frac{4}{12}$, მიღებული წილადებიდან უდიდესია $\frac{6}{11}$. პ ა ს უ ხ ი : გ).

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო. დიაგრამაზე მოცემულია ახალშობილთა რაოდენობები წლების მიხედვით:



1. რომელ წლებშია ახალშობილთა ყველაზე მეტი მატება?
2. რომელ წლებში არ არის მატება?

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო . ერთ-ერთ სკოლაში მათემატიკის ეროვნული ოლიმპიადის პირველ ტურში შემდეგი შედეგები აღინიშნა:

მოსწავლე	კლასი	ქულა
აბესაძე ნინო	VIII	20
ახალაძე ლევანი	IX	18

ბერიძე გიორგი	X	12
იაშვილი ნინო	VIII	20
კოსტავა გიორგი	X	20
კირთაძე გიორგი	IX	12
ლატარია გვანცა	XI	15
ლაღაძე მარიამი	XII	15
მინაშვილი ზაზა	XI	20
ნერგაძე ნინო	IX	10
პატარაია დავითი	XI	10
რურუა დავითი	XII	15
რუხაძე გვანცა	XI	10
შენგელია მამუკა	XI	25

უპასუხე შემდეგ შეკითხვებს:

ა) რომელი კლასიდან მონაწილეობდა ყველაზე მეტი მოსწავლე?

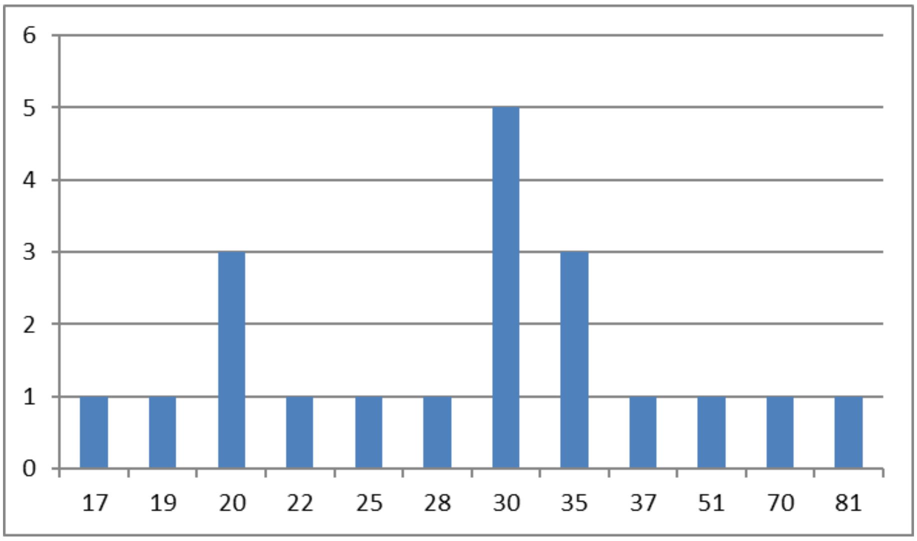
ბ) მონაწილეთა შორის რამდენი პროცენტია ვაჟი?

გ) რამდენი მოსწავლე გავიდა მომდევნო ტურში, თუ გადასასვლელი ბარიერი შეადგენდა 16 ქულას?

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოცემულია 2 წლის ასაკი ბავშვთა აქტიური ლექსიკის სიტყვების მარაგი.

ამ მონაცემების მიხედვით აგებულია ფარდობითი სიხშირეები და დიაგრამა

სიტყვათა მარაგი	სიხშირე	ფარდობითი სიხშირე
17	1	0,05
19	1	0,05
20	3	0,15
22	1	0,05
25	1	0,05
28	1	0,05
30	5	0,25
35	3	0,15
37	1	0,05
51	1	0,05
70	1	0,05
81	1	0,05



§3. მონაცემთა მახასიათებლები

დიაპაზონი, საშუალო, მედიანა, მოდა.
საშუალო სტანდარტული გადახრა

ხშირად საჭიროა მონაცემთა განაწილების დახასიათება მხოლოდ ერთი რიცხვით. ასეთ რიცხვს მიეკუთვნება საშუალო ანუ მოცემული მონაცემების საშუალო არითმეტიკული. პოპულარულ ენაზე საშუალო ნიშნავს განაწილების ცენტრს. საშუალოს საზომებს აგრეთვე უწოდებენ ცენტრალური ტენდენციის საზომებს და მათ მიეკუთვნება საშუალო, მედიანა და მოდა.

საშუალო არის მონაცემების საშუალო არითმეტიკული. ვთქვათ, მოცემული მონაცემებია $x_1, x_2, \dots, x_n$, საშუალო აღინიშნება $\overline{x}$ სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი . ინტერნეტით დავადგინეთ ნოემბრის ბოლო ერთი კვირის ტემპერატურის მონაცემები გრადუსებში ამ კვირის ყოველი დღის დილის 9 საათზე.

კვირის დღეები	ორშაბათი	სამშაბათი	ოთხშაბათი	ხუთშაბათი	პარასკევი	შაბათი	კვირა
ტემპერატურა გრადუსებში	+2	+1	+2	+3	+3	+5	+3

მოცემული მონაცემების 2, 1, 2, 3, 3, 5, 3 მიხედვით შევადგინოთ სიხშირეთა განაწილების ცხრილი

მონაცემები, x	თვლის შედეგი	სიხშირე, f
1	|	1
2	||	2
3	|||	3
5	|	1

ნოემბრის ბოლო ერთი კვირის საშუალო ტემპერატურა იქნება

$$\overline{x}=\frac{2+1+2+3+3+5+3}{7}=\frac{2\cdot 2+1+3\cdot 3+5}{7}=\frac{19}{7}\approx 2,7^{\circ}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ მონაცემის რომელიმე წევრის ცვლილება იწვევს საშუალოს ცვლილებას, რაც ნიშნავს მის არამდგრადობას. მიუხედავად იმისა, რომ საშუალო არის მონაცემთა ცენტრის ყველაზე ძლიერი მახასიათებელი, მისი ცოდნა არ არის საკმარისი მონაცემთა სიმრავლის სრულად აღსაწერად. მაგალითად, თუ მაღაზიის მეპატრონემ იცის, რომ ქალთა ფეხსაცმლის საშუალო ზომაა 37 და მაღაზიას მხოლოდ ამ ზომის ფეხსაცმელებით მოამარაგებს, მაშინ მისი ბიზნესი ვერ იქნება წარმატებული, ამიტომ საჭიროა ვიცოდეთ სხვა მახასიათებლებიც. საშუალოსგან განსხვავებით, მედიანა მიეკუთვნება მონაცემთა მდებარეობის ცენტრალური ტენდენციის მდგრადი საზომების ჯგუფს. საშუალოს შემდეგ იგი ცენტრალური ტენდენციის ყველაზე გავრცელებული საზომია.

მედიანა უკავშირდება მონაცემთა განაწილებაში (მონაცემები დალაგებულია არაკლებადობით) იმ მონაცემს, რომლის ზემოთ და ქვემოთ მონაცემთა ტოლი რაოდენობაა განლაგებული. ჩვენ მიერ განხილულ მაგალითში ასეთი მონაცემია 3.

თუ მონაცემთა რაოდენობა კენტია, მაშინ მედიანა არის მონაცემთა განაწილების შუა მონაცემი, ხოლო თუ მონაცემთა რაოდენობა ლუწია, მაშინ მედიანა არის შუა ორი მონაცემის საშუალო არითმეტიკული.

მედიანის საპოვნელად მონაცემები დავალაგოთ არაკლებადობით და გადავნომროთ, თუ მონაცემთა რაოდენობა კენტია, მაშინ მედიანის ნომერი იქნება $\frac{n+1}{2}$, სადაც n მონაცემთა

რაოდენობაა. თუ მონაცემთა რაოდენობა ლუწია, მაშინ მედიანა იქნება $\frac{n}{2}$ ნომრიანი მონაცემისა და $\frac{n}{2}+1$ ნომრიანი მონაცემის საშუალო არითმეტიკული .

მაგალითად, ზემოთ განხილული მონაცემები დავალაგოთ არაკლებადობით და გადავნომროთ. ამ მონაცემების რაოდენობაა 7, ამიტომ მედიანის ნომერი არის $\frac{n+1}{2}=\frac{7+1}{2}=4$ ე. ი. $Me=3$.

შევნიშნოთ, რომ მედიანა ყოველთვის არ არის მოცემულ მონაცემთა ერთობლიობის წევრი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი . თბილისის ერთ-ერთი კერძო სკოლის მე-10 კლასის მოსწავლეების მიერ მათემატიკის საკონტროლო წერაში მიღებული ქულებია: 5, 5, 6, 5, 6, 7, 8, 9, 4, 3, 3, 6, 7, 9. ვიპოვოთ ამ ქულების მედიანა. შევადგინოთ სიხშირეთა განაწილება, რადგანაც მონაცემთა რაოდენობა 14 ლუწია, ამიტომ მედიანა იქნება მე-8 და მე-9 მონაცემების საშუალო არითმეტიკული, ე. ი. $Me=\frac{x_7+x_8}{2}=\frac{6+6}{2}=6$, სადაც x_7 აღნიშნავს მონაცემს, რომლის რიგითი ნომერია 7, ხოლო x_8 – მონაცემს, რომლის რიგითი ნომერია 8.

მოდა არის ის მონაცემი, რომელიც ყველაზე ხშირად გვხვდება მონაცემთა განაწილებაში. მოდის განსაზღვრების თანახმად ცხადია ზემოთ განხილული მონაცემების მოდაა 3. თუ მონაცემთა ერთობლიობაში მხოლოდ ერთი მოდაა, მაშინ ამ განაწილებას ეწოდება უნიმოდალური. ჩვენ მიერ განხილული მაგალითის მონაცემთა ერთობლიობა ანუ მონაცემთა განაწილება უნიმოდალურია და მოდა არის 3. მიუხედავად იმისა, რომ მოდა ადვილად გამოითვლება დაუჯგუფებელი სიხშირეების განაწილებიდან, ის იშვიათად გამოიყენება ცენტრალური ტენდენციის საზომად, რადგანაც თუ განაწილებაში ერთზე მეტი მოდაა, მაშინ მათგან რომელი უნდა ავარჩიოთ, ამის საფუძველი არ გვაქვს. მოდის იშვიათად გამოყენების მეორე მიზეზი ისაა, რომ ერთი მონაცემის შეცვლამაც კი შეიძლება მნიშვნელოვნად შეცვალოს განაწილების მოდა. მაგალითად, ჩვენ მიერ ზემოთ განხილულ მაგალითში მონაცემი 1, რომ შევცვალოთ მონაცემი 2-ით, მაშინ მოდა იქნება ორი მონაცემი 2 და 3. ვინაიდან მოდა დამოკიდებულია მხოლოდ რამდენიმე მონაცემზე, ამიტომ ის არ არის ცენტრალური ტენდენციის სტაბილური საზომი. მოდას აღნიშნავენ m სიმბოლოთი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი . მოცემულია ავსტრალიის ერთ-ერთი უნივერსიტეტის თანამშრომელთა წლიური შემოსავლები (1000 დოლარებში): 28, 109, 26, 32, 30, 26, 29. გამოვთვალოთ საშუალო, მოდა და მედიანა. რადგანაც მონაცემთა რაოდენობა მცირეა, ადვილი გამოსათვლელია საშუალო განსაზღვრებით

$$\bar{x}=\frac{28+109+26+32+30+26+29}{7}=40.$$

დავალაგოთ არაკლებადობით 26, 26, 28, 29, 30, 32, 109. საიდანაც ვხედავთ, რომ $Me=29$, $m=26$. მედიანა უფრო მნიშვნელოვან ინფორმაციას იძლევა მაშინ, როცა მონაცემთა ერთობლიობაში მონაცემების შედარებით მცირე რაოდენობა მნიშვნელოვნად განსხვავდება დანარჩენი მონაცემებისაგან. მაგალითად, მოსახლეობის დაბალშემოსავლიანთა ფენის

შემოსავალთა განაწილებაში მედიანა უფრო ზუსტ სურათს იძლევა მოსახლეობის ამ ფენაზე, ვიდრე საშუალო, რომელიც მკვეთრად იზრდება თუ ამ ფენას დაემატება რომელიმე მდიდარი პიროვნების შემოსავალი.

გარდა მონაცემთა ცენტრალური ტენდენციის საზომისა, მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ, თუ როგორაა დაშორებული (გადახრილი) მონაცემები საშუალოდან ანუ ვიცოდეთ მონაცემთა ცვალებადობის ანუ გაფანტულობის საზომები: დიაპაზონი და სტანდარტული გადახრა, ანუ საშუალო კვადრატული გადახრა.

დიაპაზონი არის უდიდესი და უმცირესი მონაცემების სხვაობა. იგი გვიჩვენებს იმ რიცხვით შუალედის სიგრძეს, რომელშიც მოთავსებულია მოცემული მონაცემთა ერთობლიობა.

სტანდარტული გადახრა (სტ.გ.) გვიჩვენებს, თუ როგორაა საშუალოდან გადახრილი მონაცემები. სტანდარტული გადახრის გამოსათვლელად თითოეულ მონაცემს უნდა გამოვაკლოთ საშუალო, ავიყვანოთ მიღებული სხვაობები კვადრატში და ვიპოვოთ მიღებული რიცხვების საშუალო არითმეტიკული. სტ.გ. იქნება კვადრატული ფესვი ამ სა-შუალო არითმეტიკულიდან.

მ ა გ ა ლ ი თ ი . მაღაზიის მოგება (ათას ლარებში) ხუთი დღის განმავლობაში არის: 2, 3, 2, 5, 1 . ვიპოვოთ სტანდარტული გადახრა და დიაპაზონი.

1. ვიპოვოთ საშუალო $\bar{x}=\dfrac{2+3+2+5+1}{5}=2,6$;
2. თითოეულ მონაცემს გამოვაკლოთ $2,6$, მივიღებთ: $-0,6$; $0,4$; $-0,6$; $2,4$; $-1,6$;
3. ავიყვანოთ მიღებული რიცხვები კვადრატში: $0,36$; $0,16$; $0,36$; $5,76$; $2,56$;
4. ვიპოვოთ ამ რიცხვების საშუალო

$$\frac{0,36+0,16+0,36+5,76+2,56}{5}=1,84 .$$

5. სტ.გ. $=\sqrt{1,84}\approx 1,356$.

მოდას, მედიანას, საშუალოს, სტანდარტულ გადახრას მონაცემების რიცხვით მახასიათებლებსაც უწოდებენ.

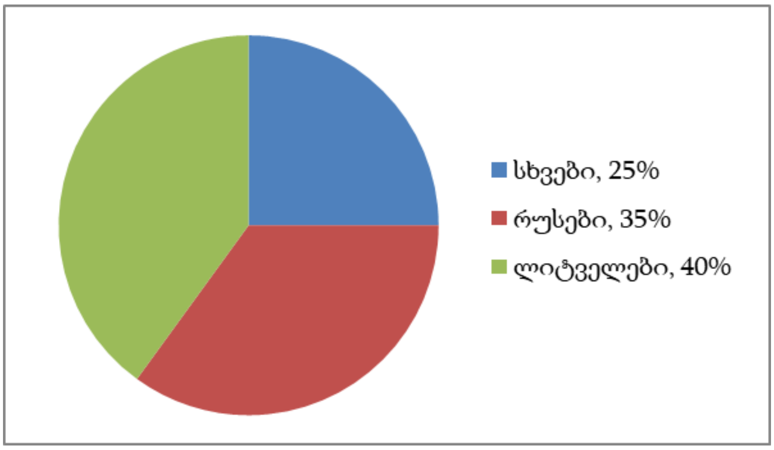
ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო . მოცემულია მონაცემები: 1, 2, 1, 3, 2, 1, 0, 3, 0, 1. იპოვეთ: ა) მედიანა; ბ) მოდა; გ) საშუალო; დ) სტანდარტული გადახრა.

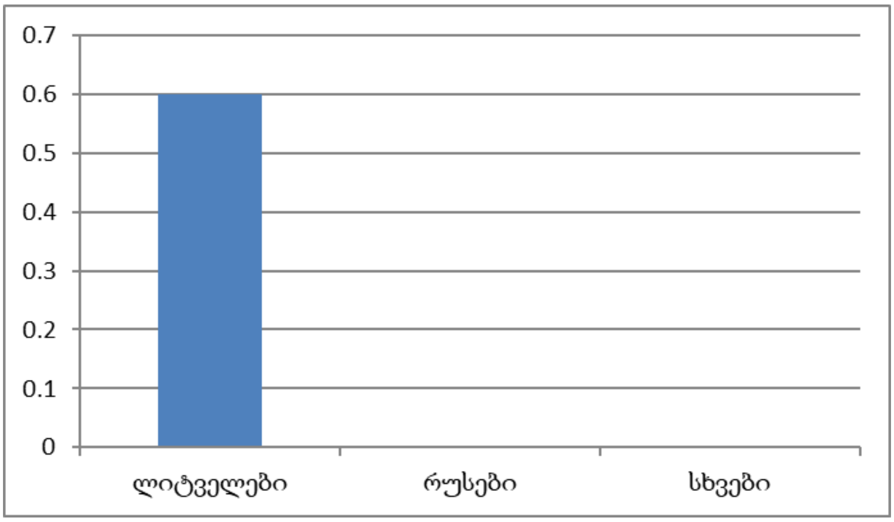
ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო .

1. თუ ყველა მონაცემი a -ს ტოლია, მაშინ რისი ტოლია: ა) მედიანა; ბ) მოდა; გ) საშუალო; დ) სტანდარტული გადახრა.
2. მოცემულია მონაცემები 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 3, a . რისი ტოლი შეიძლება იყოს: ა) მედიანა; ბ) მოდა.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო . ნინომ სემესტრის განმავლობაში მიიღო შემდეგი შეფასებები მათემატიკაში: 4, 5, 7, 6, 8, 6, 7, 8, 7, 9. ნანამ კი – 7, 8, 6, 8, 5, 8, 6, 6, 7, 8. მათთაგან რომელი სწავლობს უფრო კარგად? რომელი მახასიათებელი უნდა გამოვიყენოთ?

მ ა გ ა ლ ი თ ი. წრიულ დიაგრამაზე წარმოდგენილია, ქალაქის მცხოვრებთა რამდენ პროცენტს შეადგენენ ლიტველი, რუსი თუ სხვა ეროვნების მოქალაქეები. სვეტოვან დიაგრამაზე კი მითითებულია იმავე ქალაქის მხოლოდ ლიტველ მოქალაქეთა რაოდენობა (1:100000 პროპორციით).





შევადაროთ მოქალაქეთა საერთო რაოდენობა 140000-სს.

სვეტოვანი დიაგრამიდან ჩანს, რომ ლიტველთა რაოდენობა 60000-სს შეადგენს. ეს მთელი მოსახლეობის 40%-ია. ამიტომ მთელი მოსახლეობა იქნება

$$\frac{60000\cdot 100}{40} = 150000.$$

მთელი მოსახლეობა 140000-სს აღემატება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. არასამთავრობო ორგანიზაციამ შეამოწმა რამდენიმე ადგილობრივი და უცხოური ფირმის მიერ წარმოებული ხორცისა და თევზის კონსერვები იმის გასარკვევად, თუ რამდენად შეესაბამება ისინი ნორმით გათვალისწინებულ მოთხოვნებს. ცხრილში მოცემულია, როგორი უნდა იყოს ნორმით თითოეული ფირმის მიერ წარმოებული კონსერვის ცხიმიანობა და ენერგეტიკული ღირებულება, რა მაჩვენებლებია მითითებული ეტიკეტზე და რისი ტოლია ისინი ფაქტობრივად. ასევე, მოცემულია კონსერვის ფაქტობრივი წონა და წონა ეტიკეტის მიხედვით.

	ფირმის დასახელება	ცხიმიანობა			ენერგეტიკული ღირებულება (კკალ/100გ)			პროდუქციის წონა (გ)	
		ნორმით (არანაკლები)	ეტიკეტზე	ფაქტობრივი	ნორმით	ეტიკეტზე	ფაქტობრივი	ეტიკეტზე	ფაქტობრივი
ადგილობრივი	გური	56	70	66	170-233	302	180	325	325
	კუმისი	56	56	48	170-233	213	213	325	340
	ფარავანი	25	36	36	145-150	145	140	240	239
უცხოური	სალიო	56	68	64	170-233	220	214	525	530
	ბალატონი	25	30	38	145-150	180	183	240	245
	კენი	56	58	52	83-103	75	83	325	300

ცხრილის მიხედვით ვუპასუხოთ შემდეგ ოთხ შეკითხვას:

(i) რამდენით ნაკლებია ფირმა "სალიოს" მიერ წარმოებული კონსერვის ცხიმიანობის ფაქტობრივი მაჩვენებელი ეტიკეტზე მითითებულ მაჩვენებელთან შედარებით?

ა) 1-ით; ბ) 4-ით; გ) 6-ით; დ) 9-ით; ე) 12-ით.

(ii) რომელი ფირმის მიერ წარმოებული კონსერვის ენერგეტიკული ღირებულების ფაქტობრივი მაჩვენებელი განსხვავდება ყველაზე მეტად ეტიკეტზე მითითებულისგან?

ა) კენი; ბ) ფარავანი; გ) სალიო; დ) ბალატონი; ე) გური.

(iii) დასაშვებია, რომ კონსერვის ფაქტობრივი წონა მაქსიმუმ 3%-ით განსხვავდებოდეს ეტიკეტზე მითითებული წონისგან. რომელია ის ფირმები, რომელთა მიერ წარმოებული კონსერვი არ აკმაყოფილებს ამ მოთხოვნას?

ა) "კუმისი" და "კენი";

ბ) "კუმისი" და "ბალატონი";

გ) "კენი" და "ფარავანი";

დ) "სალიო" და "გური";

ე) "ბალატონი" და "გური".

(iv) ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი წინადადებაა მართებული?

ა) ადგილობრივი ფირმების მიერ წარმოებული კონსერვის ცხიმიანობის ფაქტობრივი მაჩვენებელი შეესაბამება ნორმას, უცხოურებისა კი – არა;

ბ) უცხოური ფირმების მიერ წარმოებული კონსერვის ცხიმიანობის ფაქტობრივი მაჩვენებელი შეესაბამება ნორმას, ადგილობრივებისა კი – არა;

გ) ზოგიერთი ადგილობრივი ფირმის მიერ წარმოებული კონსერვის ენერგეტიკული ღირებულების მაჩვენებელი ნორმის ფარგლებში იყო, მაგრამ ის არც ერთ შემთხვევაში არ ემთხვეოდა ეტიკეტზე მითითებულ მაჩვენებელს;

დ) ზოგიერთი უცხოური ფირმის მიერ წარმოებული კონსერვის ენერგეტიკული ღირებულების მაჩვენებელი ნორმის ფარგლებში იყო, მაგრამ ის არც ერთ შემთხვევაში არ ემთხვეოდა ეტიკეტზე მითითებულ მაჩვენებელს;

ე) ადგილობრივი ფირმების მიერ წარმოებული კონსერვის ფაქტობრივი წონა ყოველთვის ნაკლები იყო ეტიკეტზე მითითებულ წონაზე, უცხოურებისა კი – ყოველთვის მეტი.

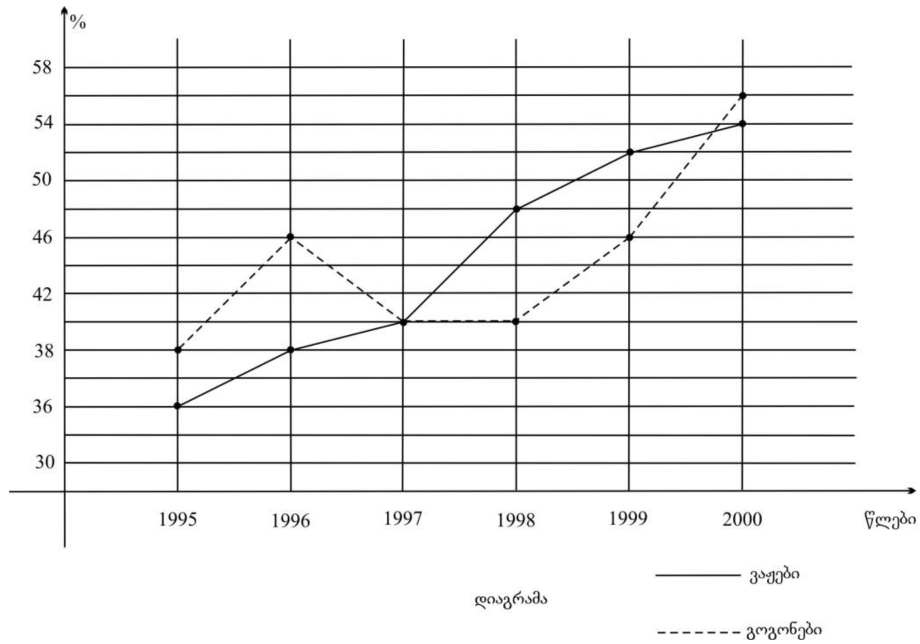
(i) ეტიკეტზე ნაჩვენებია 68, ხოლო ფაქტიური მაჩვენებელია 64. ე.ი. ნაკლებია 4-ით. პასუხი: ბ);

(ii) „გურის" ენერგეტიკული ღირებულების მაჩვენებლები 122 პუნქტით. პასუხი: ე);

(iii) „კუმისისა" და „კენის" წონის მაჩვენებლები განსხვავდებიან 3%-ზე მეტად. პასუხი: ა).

(iv) პასუხია დ), რადგან ზოგიერთ შემთხვევაში (კერძოდ, „სალიოსა" და „კენის") ენერგეტიკული მაჩვენებლები ნორმის ფარგლებში იყო, მაგრამ არ ემთხვეოდა ეტიკეტის მაჩვენებელს.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო. დიაგრამაზე მოცემულია, ერთ-ერთ უცხოურ უნივერსიტეტში ჩარიცხულ პირველკურსელ გოგონათა რამდენ პროცენტს და ვაჟთა რამდენ პროცენტს დაენიშნა სტიპენდია 1995-2000 წლებში.



დიაგრამის მიხედვით უპასუხეთ შემდეგ ოთხ შეკითხვას:

(i) რომელ წელს დაენიშნა სტიპენდია პირველკურსელ ვაჟთა 52%-ს?

ა) 1996; ბ) 1997; გ) 1998; დ) 1999; ე) 2000.

(ii) უნივერსიტეტში ჩარიცხულ პირველკურსელ გოგონათა რამდენ პროცენტს არ დაენიშნა სტიპენდია 2000 წელს?

ა) 34; ბ) 42; გ) 44; დ) 46; ე) 54.

(iii) ცნობილია, რომ 1998 წელს უნივერსიტეტში ჩარიცხულ პირველკურსელთა შორის ვაჟების რაოდენობა 2-ჯერ მეტი იყო გოგონების რაოდენობაზე. რამდენჯერ მეტი იყო ამ წელს სტიპენდიატ ვაჟთა რაოდენობა სტიპენდიატ გოგონათა რაოდენობაზე?

ა) 4,8-ჯერ; ბ) 2,4-ჯერ; გ) 2,2-ჯერ; დ) 2-ჯერ; ე) 1,6-ჯერ.

(iv) ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელია მართებული, დიაგრამის მიხედვით?

ა) ყოველ წელს უნივერსიტეტში ჩარიცხულ პირველკურსელ გოგონათა ნახევარზე მეტს სტიპენდია ენიშნებოდა;

ბ) ყოველ წელს უნივერსიტეტში ჩარიცხულ პირველკურსელ ვაჟთა ნახევარზე მეტს სტიპენდია ენიშნებოდა;

გ) უნივერსიტეტში ჩარიცხულ პირველკურსელ ვაჟთა შორის სტიპენდიატთა პროცენტული წილი ყოველწლიურად მატულობდა;

დ) უნივერსიტეტში ჩარიცხულ პირველკურსელ გოგონათა შორის სტიპენდიატთა პროცენტული წილი ყოველწლიურად მატულობდა;

ე) უნივერსიტეტში ჩარიცხულ პირველკურსელ გოგონათა შორის სტიპენდიატთა პროცენტული წილი ყოველ წელს უფრო მეტი იყო, ვიდრე შესაბამისი წილი – ვაჟთა შორის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. რიცხვთა სასრული მიმდევრობის გაბნევის მაჩვენებელი ვუწოდოთ ამ მიმდევრობის წევრთა შორის უდიდესისა და უმცირესის სხვაობის მნიშვნელობას. მაგალითად, $8,\ 0,\ 1,\ -4,\ 9,\ 2$ მიმდევრობის გაბნევის მაჩვენებელია $9-(-4)=13$.

მოცემულია რიცხვთა სასრული მიმდევრობა, რომლის ლუწნომრიან წევრთაგან შედგენილი მიმდევრობის გაბნევის მაჩვენებელი 18-ის ტოლია, ხოლო კენტნომრიან წევრთაგან შედგენილი მიმდევრობისა 10-ის ტოლია. ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომლის ტოლი შეიძლება იყოს მოცემული მიმდევრობის გაბნევის მაჩვენებელი?

ა) -8; ბ) 3; გ) 9; დ) 12; ე) 21.

საერთო გაბნევის მაჩვენებელი არ შეიძლება იყოს 18-ზე ნაკლები. ზემოდან კი ვერცერთ რიცხვს ვერ დავასახელებთ (მაგალითად მიმდევრობაში 1010, 1, 1000, 19 ლუწნომრიანი წევრების გაბნევის მაჩვენებელია 18, ხოლო კენტნომრიანი წევრების გაბნევის მაჩვენებელია 10. საერთო გაბნევის მაჩვენებელი არის 1009. შესაბამისი ცვლილებით ეს რიცხვი რაგინდ დიდი შეიძლება იყოს). პასუხი: 21.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო. რიცხვთა სასრული მიმდევრობის გაბნევის მაჩვენებელი ვუწოდოთ ამ მიმდევრობის წევრთა შორის უდიდესისა და უმცირესის სხვაობის მნიშვნელობას. მაგალითად, $6, 0, 1, -5, 11, 7$ მიმდევრობის გაბნევის მაჩვენებელია $11-(-5)=16$.

მოცემულია რიცხვთა სასრული მიმდევრობა, რომლის ლუწნომრიან წევრთაგან შედგენილი მიმდევრობის გაბნევის მაჩვენებელი 15-ის ტოლია, ხოლო კენტნომრიან წევრთაგან შედგენილი მიმდევრობისა 12-ის ტოლია. ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომლის ტოლი არ შეიძლება იყოს მოცემული მიმდევრობის გაბნევის მაჩვენებელი?

ა) 14; ბ) 16; გ) 18; დ) 20; ე) 24.

VI. ალბათობის თეორია და მისი გამოყენება რეალურ ვითარებაში. ალბათობის თეორიის ცალკეული საკითხების სწავლების მეთოდები.

ალბათობის თეორიის ძირითადი ცნებები.

დავიწყოთ ალბათობის თეორიის ყველაზე მარტივი ამოცანის განხილვით, რომლის ამოხსნაც დარწმუნებულნი ვართ ყველა მკითხველს შეუძლია. „ვთქვათ გავაგორეთ ჩვეულებრივი კამათელი. რა არის ალბათობა იმისა რომ გაგორდება 5?" თავიდანვე დავასახელოთ პასუხიც $\frac{1}{6}$, რათა დავრწმუნდეთ რომ მართლაც ამ მარტივ შემთხვევასთან გვაქვს საქმე და აქ არაფერი საორჭოფო არ არის. ახლა გავაანალიზოთ ამ ამოცანის ამოხსნის გზა რაც შეიძლება დაწვრილებით, სათანადო ტერმინებისა და მეთოდების აღწერით, რომლებსაც შემდგომ უფრო რთული ამოცანის ამოხსნისას გამოვიყენებთ.

ჯერ ჩამოყალიბებული ამოცანის პირობის ეთიკურ მხარეს დავაკვირდეთ. ცოტათი ყურს ხომ არ ეჩოთირება, რომ მასწავლებელმა გაკვეთილზე ახსენოს „კამათლის გაგორება". აქ გვერდს ვერ ავუვლით თვითონ ალბათობის თეორიის განვითარების ისტორიას. საყოველთაოდაა ცნობილი რომ ეს თეორია როგორც მეცნიერება ჩაისახა სწორედ აზარტულ თამაშებში გამარჯვება-დამარცხების შანსების გამოთვლებით

$XVI - XVII$ საუკუნეებში იმ დროის გამოჩენილი სწავლულების მიერ (კარდანო, ფერმა, პასკალი)*. ასე რომ ალბათობის თეორიის საფუძვლების შესწავლისას "კამათლის გაგორება", "მონეტის აგდება" ე.წ. "რეშკა-არიოლი", რომელსაც ჩვენ "საფასური-გერბით" მოვიხსე-ნიებთ, ან "კარტის დარიგება" ბუნებრივ პროცესებად გვევლინება, რომელთაც ვერ გავექცევით. რეალობიდან გამომდინარე ისინი წარმოადგენენ ე.წ. შემთხვევითი ექსპერიმენტების **) საუკეთესო მარტივ ნიმუშებს.

რამდენადაც ალბათობის თეორია მთლიანად შემთხვევითი მოვლენების ანალიზითაა დაკავებული, რამოდენიმე ფრაზით შევეხოთ თვითონ ცნებას „შემთხვევითობა". შემთხვევითობის ქვეშ ვგულისხმობთ, რომ კამათლის გაგორების წინ ჩვენ (და არა მარტო ჩვენ, არამედ არავის) არ შეგვიძლია ვთქვათ თუ რა იქნება რეზულტატი. ჩვენ მხოლოდ გარკვეული ვარაუდები გაგვაჩნია შესაძლო შედეგებზე. შემთხვევითობის საწინააღმდეგო (ანტონიმი) არის დეტერმინიზმი, როდესაც ექსპერიმენტის საწყისი პირობები ცალსახად განსაზღვრავენ მის საბოლოო შედეგს. დეტერმინისტული პროცესების კლასიკურ ნიმუშს წარმოადგენს სხეულთა მოძრაობა და ურთიერთქმედება ნიუტონის მექანიკაში. ჩვენ აქ არ შევუდგებით ფილოსოფიურ მსჯელობას იმის შესახებ არის თუ არა რომელიმე განხილული შემთხვევითობა „ნამდვილი შემთხვევითობა" თუ იგი მხოლოდ „მოჩვენებითი შემთხვევითობაა" განპირობებული მოცემულ ეტაპზე ჩვენი ცოდნის უკმარისობით. ალბათობის თეორიას, როგორც მათემატიკურ თეორიას, ამგვარი მსჯელობები არ აინტერესებს. როგორც წესი ალბათობის თეორია ცდილობს მაინც აღმოაჩინოს მათემატიკურად ზუსტი კანონზომიერებები ისეთ მოვლენებში, რომელნიც უკვე მიჩნეულია შემთხვევითად და ამას შესაძლო მოვლენების მოხდენის შანსების შეფასებით ანუ ალბათობების გამოთვლით იწყებს.

რას ეწოდება ალბათობა? რას ნიშნავს ყოფითი ყოველდღიურობისთვის, რომ კამათლის გაგორებისას 5-ის გამოჩენის ალბათობა არის $\frac{1}{6}$. ეს ნიშნავს იმას, რომ მეცნიერულად დასაბუთებული ინტუიციური მოლოდინი (თუკი გამოვრიცხავთ

---

*) ეს გახლავთ ერთი შეხედვით ნეგატიურ მოვლენებში პოზიციური მუხტის არსებობის კლასიკური ნიმუში, რისი შინაგანი ხედვის ნიჭითაც დღევანდელი მასწავლებელი ისედაც უხვად უნდა იყოს დაჯილდოვებული, რათა სათანადო რეაქცია გააკეთოს საკლასო გარემოში არსებული ზოგიერთი მოსწავლის რბილად რომ ვთქვათ არაშესაფერის ყოფაქცევაზე.

**) "ექსპერიმენტის" ქვეშ არ ვგულისხმობთ ამ სიტყვის კლასიკური მნიშვნელობას. ამ შემთხვევაში მხოლოდ ექსპერიმენტის მოდელთან ანუ მარტივ ცდასთან გვაქვს საქმე, რომლითაც თავად შემთხვევითობის შესწავლას ვაპირებთ.

მისნობას, ნათელმხილველობას და სხვა არამეცნიერულ პოზიციებს) 5-ის გაგორებისა არის $\frac{1}{6} \cdot 100 \approx 16{,}66\%$. რა ფაქტებს ეყრდნობა ეს ჩვენი მეცნიერულად გამართლებული მოლოდინი? თუ დავაკვირდებით, სულ გვაქვს კამათლის გაგორების 6 შესაძლო შედეგი. მათ ჰქვიათ **ელემენტარული ხდომილობები.** ე.ი სულ გვაქვს 6 ელემენტარული ხდომილობა. მოდით ისინი პირობითად ავღნიშნოთ რიცხვებით $1, 2, 3, 4, 5$ და 6. ცხადია აქ გაუგებრობას არ იწვევს, რომ 1 აღნიშნავს კამათლის გაგორების შედეგს 1-ზე, $2 - 2$-ზე და ა.შ. ალბათობის თეორიის ამოცანების ამოხსნისას

საწყის ეტაპზე მეტად მნიშვნელოვანია ელემენტარული ხდომილობებისთვის ბუნებრივი და გასაგები პირობითი აღნიშვნების შემოღება (ხშირად ამით ამოცანის ამოხსნის ნახევარზე მეტია გაკეთებული). ცხადია ეს აღნიშვნები უნდა იყოს მოკლე და არაბუნდოვანი, რადგან როგორც წესი შესაძლო შედეგები მრავალრიცხოვანია და მათთვის გრძელ ჩანაწერებს ვერ გავაკეთებთ.

აქვე განვსაზღვროთ **ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე.** როგორც წესი ალბათობის თეორიაში მას Ω-თი აღნიშნავენ ხოლმე. ეს არის ყველა ელემენტარული ხდომილობა ერთად თავმოყრილი ანუ განხილული როგორც სიმრავლე. ე.ი ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ მოცემული ამოცანისთვის შესაბამისი Ω-ს სწორად აგება ფაქტიურად განსაზღვრავს ამოცანის ამოხსნის ბედს, ამიტომ სანამ კამათლის გაგორებაზე ამოცანის ამოხსნის დემონსტრაციას გავაგრძელებთ, გავარჯიშების მიზნით, კიდევ რამოდენიმე მარტივი შემთხვევითი ”ექსპერიმენტი” ჩამოვთვალოთ და გვერდით ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე მივუწეროთ სათანადო პირობითი აღნიშვნებით. ამ ექსპერიმენტებს შემდგომშიაც მოვიხსენიებთ ამოცანების ამოხსნისას, ამიტომ ისინი გადავნომროთ.

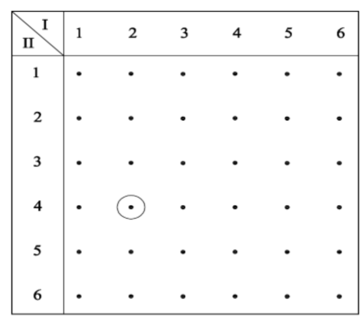
$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

ე1. მონეტის აგდება; $\Omega = \{0,1\}$ 0-საფასური, 1-გერბი.

ე2. ორი მონეტის აგდება; $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$

ე3. ურნაში ყრია 10 ერთნაირი ბურთულა და ერთ-ერთ მათგანს შემთხვევით იღებენ; $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ (იგულისხმება, რომ ეს ბურთულები გადავნომრეთ და, ვთქვათ, 3 ნიშნავს მე-3 ბურთულის ამოღებას).

ე4. ორი კამათლის გაგორება; Ω ნაჩვენებია ნახატზე

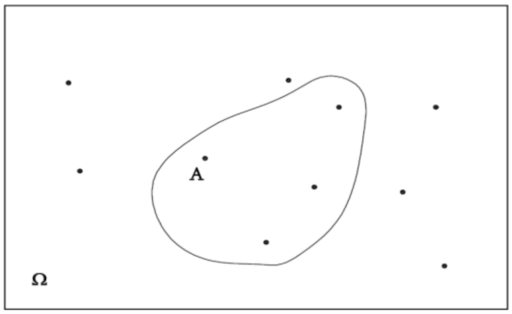


თუ ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის უფრო კომპაქტურად ჩაწერა დაგვჭირდებოდა, ვთქვათ გაკვეთილის მსვლელობისას დაფაზე დემონსტრირების მიზნით, შეგვეძლო დიაგრამაზე გამოსახული პირობითი აღნიშვნებითაც გვესარგებლა. აქ ცხადია თითოეული წერტილი აღნიშნავს კონკრეტულ ელემენტარულ ხდომილობას (სანიმუშოდ, პატარა წრეწირით შემოხაზული წერტილი მიუთითებს ელემენტარულ ხდომილობას, რომ I კამათელი გაგორდა 2-ზე და II კამათელი -- 4-ზე) და Ω სივრცე ნათლად და მკაფიოდ არის წარმოდგენილი. ეს დიაგრამა გვეხმარება ორი კამათლის გაგორების შესახებ სხვადასხვა ამოცანის ამოხსნაში. ამ ამოცანისთვის Ω-ს გამოსახვის სხვადასხვა გზას იმისთვის მივმართეთ, რათა ხაზი გაგვესვა, რომ პირობითი აღვნიშვნების შემოტანისას Ω-ს ჩაწერის დროს თავისუფალნი ვართ. მთავარია ორაზროვნება არ გამოვიწვიოთ. მაგალითად ე1 ამოცანაში 1 შეიძლებოდა ყოფილიყო საფასური და 0 – გერბი ან პირდაპირ დაგვეწერა $\Omega = \{\text{საფასური}, \text{გერბი}\}$.

ჩვენ მრავლად მოგვიწევს ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის აგება სხვადასხვა ამოცანის ამოხსნისას. მეტწილ შემთხვევებში საკმარისია მოცემული ამოცანისთვის ცალკე აღებული ერთი ელემენტარული ხდომილობა კარგად გავიაზროთ და მისთვის შესაფერისი პირობითი აღნიშვნა შემოვიღოთ, რომ პირდაპირ ვხვდებით რისგან შედგება მთლიანი Ω. ახლა განვაგრძოთ თავდაპირველი ამოცანის ამოხსნის დემონსტრირება, როცა $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. ცხადია, ამოცანის პირობიდან გამომდინარე ვგულისხმობთ, რომ თითოეული ელემენტარული ხდომილობის მოხდენის შანსი ერთიდაიგივეა, ანუ *შანსები თანაბრადაა განაწილებული* ელემენტარულ ხდომილობებზე (როგორც წესი ამგვარ სიტუაციას ვაწყდებით ალბათობის თეორიის ამოცანების უმეტესობაში, მაგრამ ყოველთვის კარგად უნდა დავაკვირდეთ, ხომ არ ირღვევა შანსების თანაბრად განაწილების პირობა. მაშინ შეიძლება ამოცანის ამოხსნა საგრძნობლად გართულდეს). ამიტომ თითოეული ელემენტარული ხდომილობის ალბათობა, და არა მარტო 5-ის გამოჩენის, არის $\frac{1}{6}$. აქ ჩვენ აუცილებელი მოვლენის ალბათობა, რომ რაიმე რიცხვი მაინც გაგორდება, რომლის შანსიც 100%-ია, ბუნებრივად მივიჩნიეთ 1-ად და შემდეგ იგი თანაბრად გავანაწილეთ. ე.ი. ძირითადი რაც ამ ელემენტარული ამოცანის ამოხსნით ვისწავლეთ არის იმის დაკვირვება, თუ რაოდენ მნიშვნელოვანია ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის აგება და მათზე შანსების თანაბრად განაწილება. ჩვენ ფაქტიურად არა მარტო ამოვხსენით ამოცანა, არამედ განვსაზღვრეთ თვითონ ალბათობის ცნება და ამას ახლა კიდევ უფრო დავაზუსტებთ იგივე მოსაზრებებზე დაყრდნობით. კერძოდ დავაზუსტოთ არამარტო ელემენტარული ხდომილობის ალბათობა არამედ ზოგადად რაიმე მოვლენის ალბათობა. ჯერ ეს მოვლენები სიტყვიერად აღვწეროთ და შემდეგ მათი მათემატიკური "შინაარსიც" ჩამოვაყალიბოთ. ვთქვათ (იმავე ამოცანაში) მოხდა ისე, რომ "გაგორდა ლუწი რიცხვი", ან "გაგორდა 4-ზე მეტი". მოდით დავწეროთ ამ მოვლენათა შესაბამისი პირობითი აღნიშვნები $A = \{2,4,6\}$, $B = \{5,6\}$. ე.ი. თითოეული მოვლენის ელემენტარული ხდომილობების მთლიანობაში აღსაქმელად ჩავსვით ისინი ფიგურულ ფრჩხილებში და წარმოვიდგინეთ როგორც სიმრავლე. ამით მივადექით „მოვლენის" ზუსტ მათემატიკურ განსაზღვრას. ალბათობის თეორიაში ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის, ანუ Ω-ს, ნებისმიერ ქვესიმრავლეს*) ჰქვია „მოვლენა" და მისთვის სპეციალური ტერმინიც არსებობს - **ხდომილობა.** ხაზი გავუსვათ იმ ფაქტს, რომ ალბათობის თეორიისთვის მოვლენები ანუ ხდომილობები გარკვეული სიმრავლეებია და მათში "მათემატიკური შინაარსის ჩადება" (და არა მის ყოფა-ცხოვრებისეულ შინაარსზე საუბარი) ნიშნავს, რომ ისინი წარმოგვიდგენია როგორც ელემენტარულ ხდომილობათა, ანუ ამ სიმრავლის ელემენტთა ერთობლიობა. კერძოდ ზემოთ დაწერილი სიმრავლეები A და B ალბათობის თეორიისთვის ხდომილობებია. დავაკვირდეთ იმასაც, რომ ალბათობის თეორიას „მოვლენის" ქვეშ ესმის არა მარტო ის რაც მოხდა (როგორც ეს ყოფა-ცხოვრებაშია მიღებული), არამედ ისიც რაც შეიძლება მოხდეს. ანუ „ექსპერიმენტის" ჩატარებამდე (კამათლის გაგორებამდე) ჩვენ შეგვიძლია ჩამოვთვალოთ ყველა ხდომილობა (ყველა შესაძლო მოვლენა). ეს იქნება Ω-ს ყველა შესაძლო ქვესიმრავლე. გავიხსენოთ რომ მას გააჩნია სულ 2^6 ქვესიმრავლე, მათ შორის

$\emptyset$, რომელსაც ალბათობის თეორიაში ჰქვია **შეუძლებელი ხდომილობა**, და Ω-**აუცილებელი ხდომილობა.** A ერთ-ერთი ამ ხდომილობათაგანია. როდესაც ცდას ჩავატარებთ (კამათელს გავაგორებთ), ჩვენ ვიტყვით, რომ A მოხდა თუკი გაგორდა 2 ან 4 ან 6. წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვით, რომ A არ მოხდა. (ამ დროს ამბობენ, რომ მოხდა A-ს დამატება ანუ $\overline{A} = \{1,3,5\}$).

შემდგომი საკითხების კარგად გასარკვევად ეს მეტად მნიშვნელოვანი ადგილია და მოდით ამიტომ იგი კიდევ ერთხელ გავიმეოროთ და თვალსაჩინოებისათვის სათანადო სქემატური სურათიც მოვიშველიოთ. ეს სურათი აღსანიშნავია იმით, რომ იგი გამოდგება ზოგად მოდელად ფაქტიურად ყველა ალბათობის თეორიის ამოცანის ამოხსნისას (სადაც კი ელემენტარული ხდომილობების რაოდენობა სასრულია და მათი მოხდენის შანსები თანაბარია). აქ წერტილები გამოხატავენ ელემენტარულ ხდომილობებს. A მოვლენა სქემატურად გამოხატულია „ფიგურით“, რომელიც მის შიდა არეში მოიცავს გარკვეულ ნაწილს ამ ელემენტარული ხდომილობებისას. ეს ყველაფერი მზადდება შემთხვევითი ექსპერიმენტის ანუ ცდის ჩატარებამდე, მაგრამ მის გამოყენებას ვაგრძელებთ შემდგომშიც და ერთიან მათემატიკურ მოდელს ვქმნით ერთი შეხედვით ისეთი არამათემატიკური ფაქტებისა როგორიცაა ”ცდის ჩატარება” და



*) ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ მკითხველი კარგად ერკვევა სიმრავლეთა თეორიის ელემენტარულ საფუძვლებში და იცის რას ეწოდება ქვესიმრავლე, გაერთიანება, თანაკვეთა და ა.შ.

„A-ს მოხდენა არმოხდენა“. როგორც ზემოთ ვახსენეთამას ვაკეთებთ სიმრავლეთა თეორიის მარტივი ენის გამოყენებით. კერძოდ ცდის ჩატარების მოდელს წარმოადგენს Ω-დან რომელიმე წერტილის შემთხვევით ამორჩევა, ვთქვათ ეს არის x წერტილი (ვგულისხმობთ, რომ მოხდა x წერტილის შესაბამისი ელემენტარული ხდომილობა). თუ აღმოჩნდა, რომ $x \in A$, მაშინ ვიტყვით, რომ A მოვლენა მოხდა. თუკი $x \notin A$, მაშინ A არ მოხდა. საინტერსო ამ თვალსაზრისში არის სწორედ ის, რომ თავისი შინაარსით ჩასატარებელი ცდაც და განხილული მოვლენაც შეიძლება იყოს აბსოლუტურად სხვადასხვაგვარი, მაშინ როცა ყველაფერი ეს შეიძლება ჩაჯდეს ამ ზოგად სქემაში. აქ მოტანილი ნიმუშის, როგორც შემთხვევითი ექსპერიმენტის ჩატარების მოდელის, კარგად გააზრება დაგვეხმარება შემდგომში გადმოცემული მასალის იოლად აღქმაშიც.

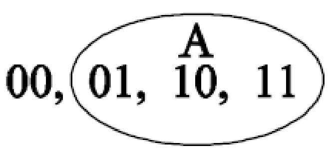
მოდით განვაგრძოთ ამ ზოგადი სქემის განხილვა და ასეთი ბუნებრივი კითხვა დავსვათ: *რას უნდა ვუწოდოთ A-ს მოხდენის ალბათობა*? ე.ი როგორ უნდა შევაფასოთ მოცემულ პირობებში A-ს მოხდენის შანსი. ცხადი ინტუიცია პირდაპირ გვკარნახობს პასუხს. თუკი Ω-ში მთლიანად n წერტილია (არ დაგვავიწყდეს, რომ თითოეული ამ წერტილის შემთხვევით შერჩევის შანსი ერთიდაიგივეა) და A ფიგურის შიგნით k წერტილია, მაშინ A-ს მოხდების ალბათობა (ანუ შანსი იმისა, რომ შემთხვევით ამორჩეული წერტილი მოხვდება A-ში) ტოლია $\frac{k}{n}$-ის. ამ ალბათობას აღნიშნავენ $P(A)$-თი. ეს არის რაიმე რიცხვი, რომელიც მოთავსებულია 0-სა და 1-ს შორის (რადგან

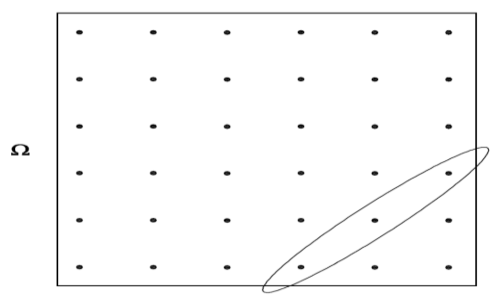
ყოველთვის $k \leq n$). ე.ი მივადექით ალბათობის თეორიის საწყისებისათვის ყველაზე მნიშვნელოვან ფორმულას

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

(1)

(მკითხველმა კიდევ ერთხელ კარგად უნდა გაიაზროს თუ რა დატვირთვა აქვს ამ ფორმულაში თითოეულ სიმბოლოს და საიდან მივიღეთ იგი. ამ ფორმულის მიხედვით ნახატზე გამოსახული A მოვლენის ალბათობა არის $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$). ჩვენ ხაზგასმით ავღნიშნავთ, რომ ეს ფორმულა ჩვენ არ დაგვიმტკიცებია. იგი ჩვენ ფაქტიურად ალბათობის განსაზღვრებად მივიჩნიეთ. ვცდილობდით მხოლოდ იმის დემონსტრირებას, რომ ამგვარი განსაზღვრა ზუსტად შეესაბამება ჩვენს ინტუიციურ წარმოდგენებს. მის გამოყენებით უკვე შეიძლება ალბათობის თეორიის მრავალი ელემენტარული ამოცანის ამოხსნა. სანიმუშოდ ამოვხსნათ რამოდენიმე მათგანი: 1) *„იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორი მონეტის აგდებისას ერთი მაინც დაეცემა გერბზე“*. ე.ი. ვატარებთ ე2 ცდას, რომლისთვისაც Ω უკვე აგებული გვაქვს და ვეძებთ A-ს ალბათობას, სადაც $A = \{01, 10, 11\}$. მაშასადამე $P(A) = 3/4$. 2*)“იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას მიღებული რიცხვების ჯამი იქნება 10-ის ტოლი*”. ე.ი ვატარებთ ე3 ცდას და $A = \{(4;6), (5;5), (6;4)\}$. მაშასადამე $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. სქემატურად ამ ამოცანების ამოხსნა შეგვეძლო შემდეგნაირად გამოგვესახა.





ანალოგიურად შეგვიძლია მოვიქცეთ ბევრ სხვა მსგავს სიტუაციაშიც.

ხშირად ფორმულა (1)-ს მოვლენის ალბათობის თეორიულ განსაზღვრას უწოდებენ. რადგან არსებობს პრაქტიკულ მოსაზრებებთან უფრო ახლო მდგომი ე.წ ემპირიული განსაზღვრებაც. მოდით ვნახოთ რა სახე აქვს მას. წარმოვიდგინოთ, რომ ჩვენ გვაქვს ერთიდაიგივე შემთხვევითი ექსპერიმენტის უამრავჯერ (რამდენჯერაც გვინდა იმდენჯერ) ჩატარების საშუალება. დავიწყოთ ამ ექსპერიმენტების ჩატარება და თან ვითვალოთ რამდენ მათგანში მოხდა A. ვთქვათ ჩვენ ჩავატარეთ N ცდა და მათგან m-ჯერ მოხდა A. შევეცადოთ ცდების რაოდენობა N იყოს რაც შეიძლება დიდი. მაშინ ვღებულობთ A-ს მოხდენის ალბათობის ემპირიულ ფორმულას

$$P(A) \approx \frac{m}{N}$$

(2)

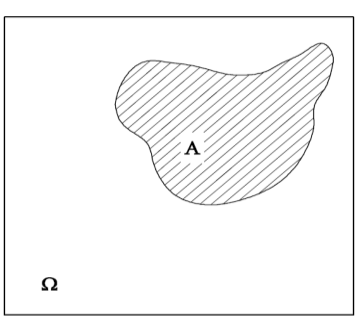
(როგორც ვხედავთ გარეგნულად ფორმულები (1) და (2) ერთნაირად გამოიყურება, მაგრამ მათი შინაარსობრივი დატვირთვა საკმაოდ განსხვავებულია და ეს კარგად უნდა გვქონდეს გააზრებული). " $\approx$ " სიმბოლო მიუთითებს იმაზე, რომ ფორმულა (2)-ში

მხოლოდ მიახლოებით ტოლობას აქვს ადგილი ((1) ფორმულასგან განსხვავებით) და ეს მიახლოება მით უფრო ზუსტი იქნება, რაც უფრო დიდია N.

მართალია ფორმულა (1) ალბათობის თეორიის საფუძვლებშივე ჩაისახა და მისი უტყუარობა ეჭვს არ იწვევდა, შემთხვევითი პროცესების ანალიზით დაინტერესებულმა ბუნებისმეტყველებმა იმთავითვე ინტუიციით იგრძნეს, რომ ფორმულა (2)-იც სამართლიანი იყო. ისტორიულად ცნობილია ექსპერიმენტები, როდესაც ერთიდაიგივე მონეტა ათასობით და ათიათასობით ააგდეს რათა დარწმუნებულიყვნენ, რომ რომელიმე ერთი მხარის (ვთქვათ გერბის) გამოჩენის რაოდენობის ფარდობა აგდებების მთელ რაოდენობასთან სულ უფრო და უფრო უახლოვდებოდა $\frac{1}{2}$-ს, ანუ ამ მოვლენის თეორიულ ალბათობას დადგენილს ფორმულა (1)-ის მიხედვით. მოგვიანებით გაჩნდა ამ წმინდა ევრისტიკული მოსაზრების, რომ ალბათობა შეიძლებოდა განსაზღვრულიყო ფორმულა (2)-ითაც , ზუსტი მათემატიკური დაფუძნება, რაც დღეს "დიდ რიცხვთა კანონით" არის ცნობილი. მისი ამ სტატიაში გადმოცემა სცდება ჩვენს მიზნებს,

მართალია ჩვენ ფორმულა (2)-ს მოვლენის ალბათობის ემპირიული განსაზღვრა ვუწოდეთ, რადგან რაღაც აზრით იგი პრაქტიკულ გზას გვაძლევს $P(A)$-ს გამოთვლის (კიდევ ერთხელ გავიმეოროთ: ჩავატარებთ ცდას ბევრჯერ, დავითვლით რამდენ მათგანში მოხდა A და ბოლოს ვიპოვით ამ ორი რიცხვის შეფარდებას), განსხვავებით ფორმულა (1)-ისა სადაც $P(A)$ მთლიანად თეორიული დაკვირვებით გამოითვლება, მაგრამ საბოლოო ჯამში ფორმულა (2)-იც მხოლოდ ჩვენი თეორიული დასკვნების ნაყოფად იქცევა, რადგან უმეტესწილად პრაქტიკულად შეუძლებელია ერთიდაიგივე ცდის ბევრჯერ გამეორება. თანაც ტოლობა ამ ფორმულაში ყოველთვის მიახლოებითია, თუკი ცდას უსასრულოდ ბევრჯერ არ ჩავატარებთ, რაც თავისთავად პრაქტიკაში შეუძლებელია. მიუხედავად ამისა ვაწყდებით ხოლმე ისეთ სიტუაციებს, როცა ფორმულა (1)-ის გამოყენება შეუძლებელია (რადგან ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა შეიძლება იყოს უსასრულო, ან შანსები იყოს არათანაბრად განაწილებული), მაშინ როცა ფორმულა (2) მშვენივრად მუშაობს. მაგალითად ეს ფორმულა გამოიყენება სასკოლო პროგრამით გათვალისწინებული ისეთი მარტივი ამოცანების ამოხსნისას როგორიცაა: *„დაახლოებით რისი ტოლია მოვლენის ალბათობა, თუკი 1000-ჯერ ჩატარებულ ცდაში ეს მოვლენა მოხდა 200-ჯერ,"* (პასუხი: 0,2) ან *„ვიცით რა, რომ მოვლენის მოხდენის ალბათობა არის 0,3, დაახლოებით რამდენჯერ მოხდება ეს მოვლენა, თუკი ცდას ჩავატარებთ 800-ჯერ?"* (პასუხი: 240-ჯერ). არსებობს ამოცანები, რომელთა ამოხსნას ორივე ფორმულის თანმიმდევრობით გამოყენება შეიძლება დასჭირდეს. მაგალითად: *„დაახლოებით რამდენჯერ გაგორდება 3 თუ კამათელს გავა-გორებთ 1200-ჯერ?"* (პასუხი: 200-ჯერ. აქ ჯერ უნდა გამოვიყენოთ ფორმულა (1) 3-ის გაგორების ალბათობის გამოსათვლელად და შემდეგ ვიანგარიშოთ ფორმულა (2)-ით).

(1) ფორმულა გვეუბნება, რომ შეუძლებელი ხდომილობის ალბათობა 0-ია, ანუ $P(\emptyset) = 0$. თავის მხრივ საზოგადოდ თუკი $P(A) = 0$ ეს არ ნიშნავს, რომ A შეუძლებელი ხდომილობაა. ფორმულა (2) გვეუბნება, რომ უბრალოდ A ძალიან იშვიათად შეიძლება მოხდეს. პრაქტიკულად ეს გვაძლევს გარანტიას, რომ ცალკე აღებულ ერთ ცდაში A არ მოხდება.



მოდით ახლა სქემატურად გამოვსახოთ კიდევ ერთი სურათი, რომელსაც იმავე მიზნებისთვის გამოვიყენებთ

რაც წინა სურათს (შემთხვევითი ექსპერიმენტების მოდელირებისთვის, ხდომილობათა ალბათობის წარმოსაჩენად, და ა. შ.), მაგრამ სადაც უკვე აღარ მოვითხოვთ, რომ Ω შედგებოდეს სასრული რაოდენობა წერტილებისაგან. ამისთვის ავიღოთ ერთეულოვანი კვადრატი (ან შეიძლება ერთეულოვანი ფართობის მქონე სხვა მართკუთხედი), რომლის წერტილებსაც ჩვენ მივიჩნევთ ელემენტარულ ხდომილობებად. მასში ჩავხატოთ რაიმე A ფიგურა, რომელსაც განვიხილავთ როგორც მოვლენას ანუ ხდომილობას (ეს სავსებით შესაძლებელია, რადგან $A \subset \Omega$). ისევ და ისევ შემთხვევით ექსპერიმენტის ჩატარების მოდელად გვევლინება Ω-დან რაიმე x წერტილის ამორჩევა (ამბობენ ხოლმე, რომ ნემსის წვერი შემთხვევით ეცემა კვადრატზე). თუკი $x \in A$ ვიტყვით, რომ A მოხდა. წინააღმდეგ შემთხვევაში (თუკი $x \notin A$) ვიტყვით, რომ A არ მოხდა. ცხადია ეს სურათი ბუნებრივად გვეუბნება იმასაც თუ რისი ტოლია A-ს ალბათობა $P(A)$. ვიმსჯელოთ ევრისტიკულად. რაც უფრო მეტი იქნება A-ს ფართობი, ანუ Ω-ს რაც უფრო დიდი პორცია ექნება A ფიგურას დაკავებული, მით უფრო მეტია შანსი, რომ შემთხვევით დაცემული ნემსის წვერო მოხვდება A-ში, ხოლო ეს უკანასკნელი შანსი ტოლია A-ს ალბათობის, ანუ ბუნებრივად ვთანხმდებით, რომ $P(A)$ იყოს A ფიგურის ფართობის შეფარდება Ω-ს ფართობასთან:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}, \tag{3}$$

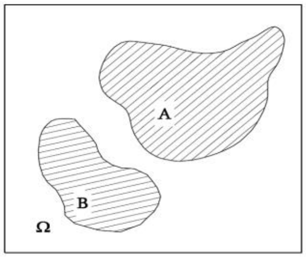
რაც ამ შემთხვევაში პირდაპირ უდრის $S(A)$-ს, რადგან როგორც ვთქვით $S(\Omega) = 1$. (მსგავს სიტუაციას ჩვენ კიდევ უფრო დაწვრილებით განვიხილავთ მე-4 ქვეთავში.) ფორმულა (3) და მისი შესაბამისი ნახატი მომავალშიც დაგვეხმარება, ხდომილობის (ანუ მოვლენის) ალბათბობის შინაარსის თვალსაჩინოდ წარმოდგენისათვის, კერძოდ როცა *პირობით ალბათობის* ცნებას შევეხებით.

სიმრავლეთა თეორიის ელემენტარული ცნებების გამოყენება ალბათობის თეორიაში. სიმრავლეთა თეორიისა და ალბათობის თეორიის საწყისი ცნებები მჭიდროდ არიან ერთმანეთში გადაჯაჭვულნი. როგორც უკვე ვნახეთ, ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე Ω აღიწერება როგორც სიმრავლე და მის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს ჰქვია ხდომილობა ანუ მოვლენა. თუკი რაიმე ფორმით (შინაარსის აღწერით ან ელემენტთა ჩამოთვლით) მოცემული გვაქვს ორი ხდომილობა A და B (ე.ი $A \subset \Omega$ და $B \subset \Omega$), მაშინ ჩვენ შეგვიძლია მათი მეშვეობით წარმოვიდგინოთ ანუ ლოგიკურად ავაგოთ სხვა ახალი ხდომილობები, ვთქვათ $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\bar{A}$, და ა.შ. ჩვენ შეგვეძლება როგორც მათი ელემენტების ჩამოთვლა, ისე მათი შინაარსობრივი წარმოდგენა. მაგალითად, თუკი შემთხვევითი ცდის ჩატარებისას, როცა კარტების სრული დასტისგან ვიღებთ ერთ კარტს, (ჩავთვალოთ, რომ Ω შედგება 52 კარტისგან) A არის „აგურების“ სიმრავლე (ე.ი. A მოხდა თუკი ამოღებული კარტი „აგურია“) და B არის „ტუზების“ სიმრავლე, მაშინ ვიტყვით, რომ მოხდა ხდომილობა $A \cup B$ თუკი ამოღებული კარტი ან აგურია ან ტუზი (ან შეიძლება ორივე ერთად), $A \setminus B$ მოხდა თუკი ეს კარტი აგურია, მაგრამ ტუზი არ არის, $\bar{A}$ - თუკი ეს კარტი აგური არ არის, და ა.შ.

თუკი A და B ხდომილობები არ შეიძლება ერთდროულად მოხდეს (ეს იქნება მაშინ, როცა A-ს და B-ს არა აქვთ საერთო ელემენტი, ანუ $A \cap B = \emptyset$) მათ *არათავსებადი*

ხდომილობები ეწოდებათ, თუკი (1) ფორმულას დავაკვირდებით, ან სათანადო დიაგრამაზე თანაუკვეთ A და B სიმრავლეებს გამოვსახავთ, დავრწმუნდებით ალბათობის თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი ფორმულის სამართლიანობაში

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)\text{, როცა } A \cap B = \emptyset \qquad (4)$$



მართლაც, თუკი A სიმრავლე მოიცავს k_1ცალ წერტილს და B სიმრავლე k_2 ცალ წერტილს, მაშინ $A \cup B$ მოიცავს $k_1 + k_2$ ცალ წერტილს და (1) ფორმულის თანახმად, $P(A) = \frac{k_1}{n}$, $P(B) = \frac{k_2}{n}$ და $P(A \cup B) = \frac{k_1+k_2}{n}$ ანუ სამართლიანია (4). იგივეს მივიღებდით სურათზე გამოხატული ფართობების შეკრებითაც, ანუ ფორმულა (3)-ის მოშველიებით.

ამოვხსნათ ამ ფორმულის გამოყენებით რაიმე მარტივი ამოცანა. ვთქვათ ასეთი: *ყუთში გვაქვს 20 ერთნაირი ბურთულა, რომელთაგან 3 მწვანეა, 5 წითელი და 7 ყვითელი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბურთი ან მწვანეა ან ყვითელი.* ცხადია ეს ამოცანა შეიძლებოდა პირდაპირ (1) ფორმულის გამოყენებითაც ამოგვეხსნა, მაგრამ გამოვიყენოთ (4) ფორმულა. მწვანე ბურთულის ამოღების ალბათობაა $\frac{3}{20}$, ანუ თუ A-თი აღვნიშნავთ მოვლენას „მწვანე ბურთულის ამოღებას“, მაშინ $P(A) = \frac{3}{20}$ ((1) ფორმულის ძალით). ანალოგიურად ყვითელი ბურთულის ამოღების ალბათობაა $\frac{7}{20}$, ანუ თუ B-თი აღვნიშნავთ მოვლენას „ყვითელი ბურთულის ამოღებას“, მაშინ $P(B) = \frac{7}{20}$. შემოღებული აღნიშვნებით მოვლენა „მწვანე ან ყვითელი ბურთულას ამოღება“ იქნება $A \cup B$. რახან A და B მოვლენები არათავსებადია (ანუ $A \cap B = \emptyset$), ამიტომ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{20} + \frac{7}{20} = \frac{1}{2}$, ანუ ამოცანის პასუხი იქნება $\frac{1}{2}$. ცხადია იგივე პასუხს მივიღებდით (1) ფორმულის გამოყენებითაც. (შეამოწმეთ !)

იმ შემთხვევაში როცა ვიცით A-ს მოხდენის ალბათობა, (4) ფორმულიდან მიიღება მისი არ მოხდენის ალბათობის გამოსათვლელი მარტივი ფორმულა

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \qquad (5)$$

მართლაც, ვინაიდან $A \cup \bar{A} = \Omega$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$ და $P(\Omega) = 1$, ამიტომ $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ და მიიღება (5) ფორმულა.

(4) ფორმულა შეიძლება უშუალოდ განზოგადდეს სამი ან ზოგადად n წყვილ-წყვილად არათავსებადი ხდომილობისათვის

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

(5')

სადაც $A_i \cap A_j = \emptyset$. ეს კეთდება ზუსტად იმავე მოსაზრებებით როგორადაც ორი რიცხვის შეკრების ცოდნაზე დაყრდნობით ვკრებთ სამ, ოთხ ან ზოგადად n შესაკრებს.

თუ A და B ხდომილობების თანაკვეთა ცარიელი არაა, მაშინ (4) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

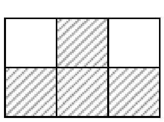
(6)

ეს ფორმულა ინტუიციურად ცხადია და იგი უშუალოდ გამომდინარეობს მოცემული სიმრავლეების გაერთიანებაში ელემენტების რაოდენობის დასათვლელი შესაბამისი ფორმულიდან ან თანამკვეთი ფიგურებით შემოსაზღვრული არის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულიდან (ალბათობას ჩვენ მივეცით ეს ორივე ინტერპრეტაცია ფორმულებით (1) და (3)), მაგრამ მოდით მკაცრ ლოგიკურ მსჯელობებში გასავარჯიშებლად მოვიტანთ მისი ზუსტი დამტკიცებაც. ამისთვის წარმოვიდგინოთ A თანაუკვეთი სიმრავლეების გაერთიანების სახით: $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$ (შეამოწმეთ !). ასევე B სიმრავლე $B=(B\setminus A)\cup(A\cap B)$, და $A\cup B$ სიმრავლეც: $A\cup B=(A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)$. მაშინ (4) ფორმულის ძალით $P(A)=P(A\setminus B)+P(A\cap B)$, $P(B)=P(B\setminus A)+P(A\cap B)$ და $P(A\cup B)=P(A\setminus B)+P(A\cap B)+P(B\setminus A)=P(A\setminus B)+ +P(A\cap B)+P(B\setminus A)+$ $P(A\cap B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
რ.დ.გ.

ახლა ამოვხსნათ (6) ფორმულის გამოყენებით მარტივი ამოცანა: *„52 კარტის დასტიდან შემთხვევით ვიღებთ ერთ კარტს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს კარტი არის აგური ან ტუზი“*. დავაკვირდეთ ამოხსნის ზუსტ მსჯელობას. A იყოს აგური კარტებისგან შემდგარი ხდომილობა (მასში შევა 13 კარტი), ხოლო B იყოს ტუზებისგან შემდგარი ხდომილობა (4 კარტი). შემოტანილი აღნიშვნებით ამოცანის კითხვა მდგომარეობს $A\cup B$ ხდომილობის ალბათობის პოვნაში. თუ დავაკვირდებით რომ $A\cap B$ ხდომილობა შედგება ერთადერთი კარტისაგან, კერძოდ აგურის ტუზისგან, მაშინ იოლად გამოვთვლით (5) ფორმულის მარჯვენა მხარეში მდგომი ხდომილობების ალბათობებს: $P(A)=\frac{13}{52}$, $P(B)=\frac{4}{52}$ და $P(A\cap B)=\frac{1}{52}$ მაშასადამე $P(A\cup B)=\frac{13}{52}+\frac{4}{52}-\frac{1}{52}=\frac{4}{13}$.

ცხადია ეს ამოცანა შეგვეძლო ამოგვეხსნა სხვაგვარი გზითაც, ვთქვათ ფორმულა (1)-ის პირდაპირი გამოყენებით (სცადეთ !). ჩვენ უბრალოდ გავივარჯიშეთ ზუსტ მსჯელობაში. ამგვარი მსჯელობის დემონსტრირება შეიძლება მოვახდინოთ გაკვეთილზეც მოსწავლეთათვის და უნდა ველოდეთ, რომ გარკვეულ დონეზე მოსწავლეები აუღებენ ალღოს ამ მსჯელობას. ცხადია არ არის სავალდებულო თავად მოსწავლეებს მოვთხოვოთ თავიდანვე, ალბათობის თეორიის შესწავლისას, ამგვარი ზუსტი მსჯელობების ჩატარება.

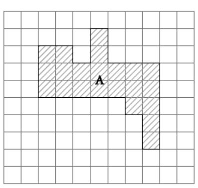
გეომეტრიული ალბათობები. დავიწყოთ ისეთი ამოცანების განხილვით, რომლთა ამოხსნასაც ყოველგვარი წინა მასალის წაკითხვის გარეშე შეძლებდა მკითხველი.

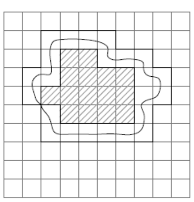


„ვთქვათ მოცემულ მართკუთხედში შემთხვევით ეცემა ნემსის წვერი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ იგი დაეცემა დაშტრიხულ ადგილზე“. პასუხი ცხადია $P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. მივაქციოთ ყურადღება, რომ ამ ამოცანის ამოხსნისას საერთოდ არ მიგვიქცევია ყურადღება მართკუთხედის ზომებისთვის. საკმარისია იმის შემჩნევა, რომ 6-ვე პატარა კვადრატი, რომელ ნაწილებადაც დავყავით მართკუთხედი, ერთნაირია. შევეცადოთ ახლა ამ ამოხსნას პატარა მსჯელობაც დავურთოთ, რომლითაც ყველაფერი უკვე აღწერილ სტანდარტულ ჩარჩოში ჩაჯდება.

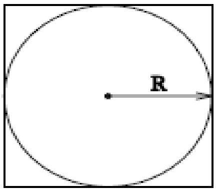
თავის მხრივ იგივე მსჯელობა გამოგვადგება შედარებით უფრო რთული ამოცანების ამოხსნისას. საქმე ის არის, რომ ერთი შეხედვით რაოდენაც გასაკვირად არ უნდა გამოიყურებოდეს, ჩვენ უბრალოდ გამოვიყენოთ (1) ფორმულა. მართლაც, ვინაიდან ნემსის წვერის შემთხვევით დაცემა ნიშნავს, რომ არცერთ ადგილს პრიორიტეტი არ ენიჭება და ამასთანავე ექვსივე შემადგენელი კვადრატი ერთნაირია, ამიტომ ნემსის წვერის დავარდნის უამრავი სხვადსხვა ადგილი შეგვიძლია დავყოთ და წარმოვიდგინოთ თანაბარი შანსების მქონე 6 განსხვავებულ შესაძლებლობად. ანუ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომ Ω შედგება 6 წერტილისგან. ამათგან 4 არის "ამოცანის პირობის ხელშემწყობი" (რადგან 4 კვადრატია დაშტრიხული) ე.ი. $k = 4$-ს (1) ფორმულაში და მიიღება ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულაც.

ისმის კითხვა: ღირდა კი ამ მარტივი სიტუაციის ასე დაწვრილებით განხილვა. თითქოს ყველაფერი ისედაც ცხადი იყო. თურმე ღირდა, რადგან ზუსტად იგივე მსჯელობა საშუალებას გვაძლევს თავი გავართვათ გაცილებით უფრო ზოგად სიტუაციებს. კერძოდ, მაგალითისთვის, ჩვენ შეგვიძლია არა მარტო ინტუიციურად მივხვდეთ ფორმულა (3)-ის სამართლიანობას, როგორც ეს ადრე გავაკეთეთ, არამედ დავასაბუთოთ კიდეც იგი. მართლაც, დავუბრუნდეთ იმ მსჯელობას და ნახატს სადაც ეს ფორმულა იყო მოყვანილი.A ფიგურა რომ ყოფილიყო პატარა ტოლად დაყოფილი კვადრატებისაგან შედგენილი, მაშინ (3) ფორმულა ისევე გადაიქცეოდა (1) ფორმულად, როგორც ეს ზემოთ აღვწერეთ. ხოლო ზოგად სიტუაციაში ფაქტიურად უნდა



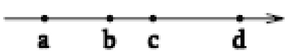


გავიხსენოთ თვითონ ფართობის განსაზღვრა, რაც პირდაპირ მიგვიყვანს ფორმულა (3)-ის სამართლიანობამდე. იმისათვის, რომ დავადგინოთ მოცემული A ფიგურის ფართობი, მართკუთხედი უნდა დავყოთ რაც შეიძლება პატარა ტოლ კვადრატებად. დავთვალოთ ამ კვადრატებიდან რამდენი შედის მთლიანად A-ში და რამდენს აქვს თუნდაც პატარა თანაკვეთა A-სთან. ანუ A ფიგურას შიგნიდან და გარედან მივუახლოვდეთ ისეთი ფიგურებით, რომლებიც ზუსტად შედგებიან პატარა კვადრატების გაერთიანებისგან, რითაც ზუსტად დავთვლით მათ ფართობებს და მივიღებთ A-ს ფართობის მიახლოებას ქვემოდან და ზემოდან. ეს მიახლოება მით უფრო ზუსტი იქნება, რაც უფრო პატარა კვადრატებად დავყოფთ თავიდან აღებულ მართკუთხედს. მართლაც თუკი მართკუთხედი დავყავით N ცალ პატარა კვადრატად, რომელთაგან k_0 შედის A-ში (ამ კვადრატების გაერთიანება აღვნიშნოთ A_0-ით), ხოლო k_1-ს თანაკვეთა აქვს A-სთან (ამ კვადრატების გაერთიანება აღვნიშნოთ A_1-ით), მაშინ $P(A)$, ალბათობა იმისა რომ შემთხვევით შერჩეული წერტილი იქნება A-ში, მოთავსებულია $P(A_0)$-სა და $P(A_1)$-ს შორის, რადგან $A_0 \subset A \subset A_1$. მაგრამ $P(A_0) = \frac{k_0}{N} = \frac{k_0 a}{Na} = \frac{S(A_0)}{S(\Omega)}$ და $P(A_1) = \frac{k_1}{N} = \frac{S(A_1)}{S(\Omega)}$, სადაც a აღნიშნავს პატარა კვადრატის ფართობს. მაშასადამე $\frac{S(A_0)}{S(\Omega)} \leq P(A) \leq \frac{S(A_1)}{S(\Omega)}$ და ფართობის ცნებაზე ჩვენი წარმოდგენის ძალით, რომ $S(A)$ ეს არის რიცხვი, რომელსაც (უსასრულოდ) უახლოვდება $S(A_0)$ და $S(A_1)$, რაც უფრო დაყოფის სიხშირეს ვზრდით, ვღებულობთ (3) ფორმულის სამართლიანობას.



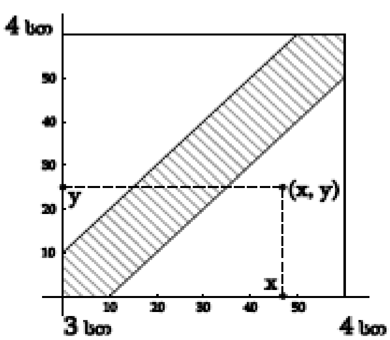
ამოვხსნათ ამ ფორმულის გამოყენებით მარტივი, მაგრამ არატრივიალური ამოცანა. *„ვთქვათ R რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზულია კვადრატი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული კვადრატის წერტილი ჩავარდება წრეში“.* პირადაპირ გამოვიყენოთ (3) ფორმულა $P=\frac{S(\text{წრის})}{S(\text{კვადრატის})}=\frac{\pi R^2}{(2R)^2}=\frac{\pi}{4}\approx 0.79.$

განხილული მსჯელობის მსგავსი მსჯელობა შეიძლება ჩავატაროთ მონაკვეთზე შემთხვევით შერჩეული წერტილისთვისაც. ამოვხსნათ ასეთი ამოცანა: *„რიცხვით ღერძზე* $[0,5]$ *მონაკვეთიდან შემთხვევით ვირჩევთ ერთ წერტილს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ წერტილი მოხვდება* $[3,4]$*-ში."* ამ ამოცანის ამოხსნა აღარავითარ სიძნელეს არ უნდა წარმოადგენდეს. მისი პასუხია $P=\frac{1}{5}$ და ალბათ გასაგებია ეს პასუხი როგორაც მიიღება. უფრო მეტიც, ზუსტად ანალოგიურად როგორც ზემოთ ვისმჯელეთ, თუკი პატარა კვადრატების ნაცვლად უკვე პატარა მონაკვეთებად დავყოფთ თავიდან აღებულ დიდ მონაკვეთს, მივიღებთ ფორმულას შემდეგი ამოცანის ამოსახსნელად: *„ვთქვათ რიცხვით ღერძზე აღებულია ოთხი წერტილი* a, b, c *და* d*, სადაც* $a\le b<c\le d$*. თუკი*



ვიღებთ შემთხვევით წერტილს $[ad]$ *მონაკვეთზე, რა იქნება იმის ალბათობა, რომ ეს წერტილის მოხვდება* $[b,c]$ *მონაკვეთში“.* მკითხველს ვთხოვოთ დამოუკიდებლად მაგრამ ზუსტად ჩაატაროს იგივე მსჯელობა რაც ფართობებისთვის და მიიღოს პასუხი: $P=\frac{|c-b|}{|d-a|}$.

ქვეთავის დასასრულს ამოვხსნათ ალბათობის თეორიის ერთი რთული, მაგრამ საინტერესო ამოცანა გეომეტრიული მოსაზრებების გამოყენებით. *„გია და ზურა მიდიან ავტობუსის გაჩერებაზე ცალ-ცალკე ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად* 3*-სთ-დან* 4*-სთ-მდე დროის ნებისმიერად შერჩეულ შემთხვევით მომენტში და აპირებენ დაიცადონ* 10 *წუთი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ გია და ზურა შეხვდებიან ერთმანეთს“.*

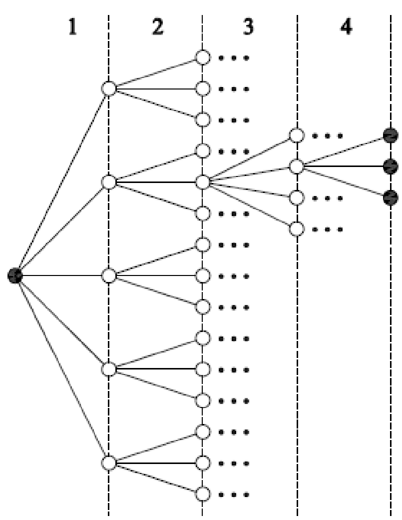


გაჩერებაზე გიას გამოჩენის დრო (გაზომილი წუთებში) აღვნიშნოთ x-ით, ხოლო ზურასი – y-ით. თუკი ამ (x,y) წერტილს დავსვამთ საკოორდინატო სიბრტყეზე, მაშინ გვექნება ნახაზზე გამოსახულ კვადრატში შემთხვევით არჩეული ერთი წერტილი. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდნენ x და y, რათა გია და ზურა შეხვდნენ ერთმანეთს? ვინაიდან თითოეული მათგანი მისვლის შემდეგ იცდის კიდევ 10 წუთს, უნდა სრულდებოდეს დამოკიდებულება $|x-y|\le 10.$ ამ უტოლობის ამონახსნი დაშტრიხულია ნახატზე (ჯერ უნდა დავშტრიხოთ $|x-y|=10$ განტოლების ამონახსნი და შემდეგ ვამოძრაოთ ცვლადები უტოლობის მისაღებად). გია და ზურა შეხვდებიან ერთმანეთს თუკი კვადრატიდან შემთხვევით შერჩეული წერტილი ჩავარდება დაშტრიხულ ნაწილში. ე.ი. დაგვრჩა ვიანგარიშოთ ამ ფიგურის ფართობი. სიმეტრიულობიდან გამომდინარე გავატაროთ $y=x$ ბისექტრისა და გამოვთვალოთ (ვთქვათ მსგავსობის გამოყენებით)

დაუშტრიხავი სამკუთხედების ფართობი. საბოლოო ჯამში საძიებელი ალბათობისთვის მივიღებთ პასუხს $P=\frac{11}{36}$.

ალბათობის თეორია და კომბინატორიკა. როგორც ზემოთ ვახსენეთ სასკოლო პროგრამით გათვალისწინებული ალბათობის თეორიის ამოცანების დიდი უმეტესობა სწორედ თავიდანვე ჩამოყალიბებული ძირითადი ფორმულა (1)-ის მეშვეობით იხსნება. მაგრამ თანდათან, სხვადასხვა სირთულის დონის ამოცანებზე გადასვლისას, ამ ფორმულაში შემავალი ნატურალური რიცხვების n-ის და k-ს მოძებნა რთულდება. ხშირად ეს რიცხვები გამოხატავენ მოცემულ სქემებში ყველა შესაძლო სხვადასხვა ვარიანტების რაოდენობას. მათემატიკის იმ დარგს, რომელიც ამგვარი რაოდენობის გამოთვლის მეთოდებს შეისწავლის *კომბინატორიკა* ეწოდება. კომბინატორიკის ამოცანა შეიძლება იყოს ძალიან მარტივი, როგორსაც ხანდახან ვაწყდებით ხოლმე დაწყებითი კლასის სახელმძღვანელოებში (მაგალითად: „*A-დან B-მდე ორი გზა არსებობს, ხოლო B-დან C-მდე სამი. სულ რამდენი გზა არსებობს A-დან C-მდე B-ს გავლით?*“ ან „*რამდენი სხვადასხვა სამნიშნა რიცხვი შეგვიძლია ჩავწეროთ მხოლოდ ორი ციფრის გამოყენებით 1-ით და 2-ით?*“) და რომელშიც ყველა შესაძლო ვარიანტი შეგვიძლია პირდაპირ ჩამოვწეროთ და დავთვალოთ (პირველი ამოცანის პასუხია 6, ხოლო მეორის - 8) ან იმდენად რთული, რომ მის ამოხსნას სპეციალური კომპიუტერული პროგრამის დაწერა და კომპიუტერზე ხანგრძლივი გამოთვლების ჩატარება დასჭირდეს. კომბინატორიკის საწყისი ამოცანების მწყობრი და სისტემიზირებულად გააზრებული ცოდნა აუცილებელია სკოლის მასწავლებლისთვის. მათემატიკის ეს დარგი საშუალებას გვაძლევს ასევე ლოგიკის გასავარჯიშებელი კარგი ამოცანები მივაწოდოთ მოსწავლეებს. როგორც ვნახეთ, მის უშუალო გამოყენებებს ვაწყდებით ალბათობის თეორიაშიც. ამიტომ ამ ქვეთავში ჩვენ ვრცლად შევჩერდებით კომბინატორიკის თეორიის საფუძვლების გასაცნობად.

დავიწყოთ ე.წ. ვარიანტების *დათვლის უნივერსალური პრინციპით* და ჩამოვაყალიბოთ იგი კონკრეტული რაოდენობებისათვის, რათა ბოლომდე ნათელი იყოს მისი არსი. ვთქვათ რაიმე კომბინაციის შერჩევა ხდება საფეხურებად (ბიჯებად) და გარკვეულობისთვის ავიღოთ 4 საფეხური (ბიჯი). დავუშვათ პირველ ბიჯზე შეგვიძლია შევარჩიოთ 5 ვარიანტი, მეორე ბიჯზე-3 ვარიანტი (თითოეული შერჩეული პირველი ვარიანტისთვის), მესამეზე - 4 (თითოეული შერჩეული პირველი ორი ვარიანტისთვის) და მეოთხეზე - ისევ 3 (თითოეული შერჩეული პირველი სამი ვარიანტისთვის). მაშინ სულ შეგვიძლია შევარჩიოთ $5\cdot3\cdot4\cdot3=180$ სხვადასხვა კომბინაცია (ვარიანტი).



სქემატურად ამ პასუხის მიღების მეთოდი გამოსახულია ნახაზზე. სულ არსებობს იმდენი ვარიანტი რამდენი სხვადასხვა გზითაც შეგვიძლია მივიდეთ საწყისი გამუქებული წრიდან ერთ-ერთ რომელიმე საბოლოო გამუქებულ წრემდე და

განშტოებების გათვალისწინებით (საწყისი წრიდან გამოსვლისთანავე თითოეულ საფეხურზე გვაქვს იმდენი განშტოება, რამდენი ვარიანტიც იყო ამ საფეხურზე) ამ შესაძლო გზების რაოდენობა ტოლია ამ ვარიანტების ნამრავლის $5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 180$. უფრო მოკლედ, მაგრამ ნაკლებად მკაცრად, ეს მსჯელობა შეგვეძლო ამგვარადაც ჩაგვეტარებინა: თავიდან გვაქვს ოთხი ცარიელი უჯრა $\square\square\square\square$ (ოთხი საფეხურის შესაბამისი). თანმიმდევრობით თითოეულ უჯრაში ვწერთ შესაბამისი ვარიანტების რაოდენობას $\boxed{5}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{3}$და ვაკვირდებით, რომ თითოეულ საფეხურზე ახლად გამოჩენილი ვარიანტების რაოდენობა გამოისახება მათი ნამრავლით. ე.ი. საბოლოოდ გვექნება 5·3·4·3.

ზოგადად ეს პრინციპი შეგვეძლო ჩამოგვეყალიბებინა შემდეგნაირად: *თუ ვარიანტების შერჩევა ხდება N საფეხურად, სადაც პირველ ბიჯზე გვაქვს n_1 ვარიანტის შერჩევის შესაძლებლობა, მეორეზე - n_2-ის და ა.შ. N-ურზე - n_N-ის, მაშინ სულ გვექნება $n_1 \cdot n_2 \cdots n_N$ ნამრავლის ტოლი სხვადასხვა ვარიანტების შერჩევის საშუალება.*

ამ პრინციპის ახსნისას ჩვენ უთქმელად გამოვიყენეთ რაოდენობების დათვლის კიდევ უფრო ფუნდამენტალური პრინციპი, რომელსაც ყველა ჩვენთაგანი ფლობს ქვეცნობიერად, მაგრამ ხანდახან მისი გააზრებული გამოყენებაც გვჭირდება. მოსწავლეთათვის ყველაზე გასაგებ ენაზე ეს შეიძლება ამგვარად ჩამოყალიბდეს: „თუ ვიცოდით, რომ საკლასო ოთახში 20 მერხი დგას და გაკვეთილზე შესვლისას ვხედავთ, რომ თითოეულ მერხზე თითო მოსწავლე ზის, მაშინ აღარ გვჭირდება მოსწავლეების რაოდენობის დასადგენად მათი ხელახალი გადათვლა. პირდაპირ მივხვდებით, რომ ისინი 20-ნი არიან.“ ანუ მკაცრი მათემატიკური ენით, თუ A და B სიმრავლეებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა (იხ. თემა „ფუნქციები“) მაშინ ამ სიმრავლეებში ელემენტების რაოდენობა ერთიდაიგივეა. (ვარიანტების დათვლის უნივერსალური პრინციპის ახსნისას ჩვენ დავამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შესაძლო ვარიანტებსა და გამუქებული წრეების შემაერთებელ გზებს შორის).

ვარიანტების დათვლის ზემოთმოყვანილი პრინციპიდან გამომდინარეობს ყველა ის ფორმულა, რაც აუცილებელია კომბინატორიკის საფუძვლების ცოდნისათვის. კერძოდ მოცემული n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა რაოდენობის განმსაზღვრელი ფორმულა, ჯუფდების, წყობისა და გადანაცვლების ფორმულები (თუმცა ეს ფორმულები შეგვიძლია სხვა გზითაც დავამტკიცოთ, მაგალითად მათემატიკური ინდუქციით). ამ ფორმულებს ძალიან ხშირად ვიყენებთ ალბათობის თეორიის ამოცანების ამოხსნისას. მოდით დავიწყოთ პირველი ფორმულის გამოყვანით.

რამდენი სხვადასხვა ქვესიმრავლე გააჩნია 5 ელემენტიან სიმრავლეს? 8 ელემენტიან სიმრავლეს? n ელემენტიან სიმრავლეს? ჩავატაროთ მსჯელობა 5 ელემენტისთვის და თვითონვე მივხვდებით მის განზოგადოებას n ელემენტისთვის. ავიღოთ ყველაზე მარტივი ხუთ ელემენტიანი სიმრავლე $\{1,2,3,4,5\}$. ცხადია (თუმცა გააზრებას მოითხოვს), რომ ჩვენი მიზნების განსახორციელებლად სულერთია რომელ სიმრავლეს ავიღებთ. მთავარია ელემენტების რაოდენობა იყოს 5. წარმოვიდგინოთ, რომ გვაქვს 5 ელემენტის შესაბამისი 5 ცარიელი ადგილი. სხვადასხვა ქვესიმრავლეების შერჩევისას

თითოეული ადგილისთვის გვაქვს არჩევის ორი ვარიანტი. ამ ადგილის შესაბამისი ელემენტი ან ჩავრთოთ ქვესიმრავლეში, ან არ ჩავრთოთ. მოდით სიმბოლურად 1 აღნიშნავდეს ჩართვას, ხოლო 0-არ ჩართვას.

0	1	0	0	1
1	2	3	4	5

მაშინ ნახატზე გამოსახული სიმბოლოებით მივიღებთ ქვესიმრავლეს $\{2,5\}$. მაგალითად $\emptyset$-ის ჩაწერა ამ სიმბოლოებით (არ დაგვავიწყდეს, რომ ცარიელი სიმრავლეც ერთ-ერთი ქვესიმრავლეა) იქნება ამგვარი 00000, ანუ თითოეულ ადგილზე გავაკეთეთ არჩევანი არ ჩართვის. 11010 იქნებოდა ქვესიმრავლე $\{1,2,4\}$, და ა.შ. ე.ი. $\{1,2,3,4,5\}$-ს აქვს იმდენივე ქვესიმრავლე, რამდენი 5 ციფრიანი სიმბოლოც არსებობს მხოლოდ 0-ებითა და 1-ებით ჩაწერილი (ამგვარ სიმბოლოებსა და ქვესიმრავლეებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა). რადგან თითოეულ საფეხურზე გვაქვს 2 არჩევანის საშუალება და სულ გვაქვს 5 საფეხური, ყველა შესაძლო ვარიანტი იქნება $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^5$. ე.ი. ამოცანის პასუხი არის 2^5. ანალოგიურად 8 ელემენტიან სიმრავლეს ექნება 2^8 ქვესიმრავლე და n ელემენტიან სიმრავლეს-2^n ქვესიმრავლე.

ახლა ამოვხსნათ გადანაცვლების შესახებ ამოცანა. 5 მოსწავლე რამდენი სხვადასხვა გზით შეგვიძლია დავაყენოთ ერთ რიგში? ჩავთვალოთ, რომ რიგს აქვს 5 ცარიელი ადგილი. $\square\square\square\square\square$ პირველ ადგილზე გვაქვს 5 არჩევანის საშუალება, რადგან იქ შეგვიძლია დავაყენოთ 5-დან ნებისმიერი მოსწავლე, მეორე ადგილზე გვაქვს 4 არჩევანის საშუალება, რადგან მას შემდეგ რაც პირველი არჩევანი გაკეთდა, ასარჩევთაგან დარჩა 4. ანალოგიურად შემდგომ ადგილზე არჩევანი ისევ ერთით დაიკლებს და ა.შ. ბოლო მეხუთე ადგილისთვის განკუთვნილი ზუსტად ერთი მოსწავლე დარჩება. ამრიგად, ვარიანტების დათვლის პრინციპის თანახმად ამოცანის პასუხი იქნება $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5!$ ანალოგიური მსჯელობით ზოგადად n მოსწავლისთვის ერთ რიგში განლაგების $n!$ სხვადასხვა ვარიანტს მივიღებდით. ეს რიცხვი P_n-ით აღინიშნება და მას n რიცხვის *გადანაცვლებათა* რაოდენობა ეწოდება.

რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი იქნებოდა, რიგში 5 მოსწავლიდან მხოლოდ 3 რომ დაგვეყენებინა. იმავე მსჯელობით პასუხს მივიღებდით ნამრავლს $5\cdot4\cdot3$ რაც უდრის $\frac{5!}{(5-3)!}$-ს. ზოგადად 5-ისა და 3-ის ნაცვლად n და k რომ ყოფილიყო $(k\le n)$. მივიღებდით ნამრავლს $n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)$. ეს რიცხვი აღინიშნება A_n^k-თი, $A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$ და მას n ობიექტისგან შემდგარი k სიგრძის *წყობათა* რაოდენობა ეწოდება.

5 მოსწავლიდან 3 უბრალოდ რომ შეგვერჩია (და მათ თანმიმდევრობაზე აღარ გვეზრუნა) მაშინ რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი იქნებოდა? ე.ი. ამ დროს იგულისხმება, რომ თუკი წინა ამოცანაში 2,4,1 და 4,1,2 რიგში მდგომი სამი მოსწავლის სხვადსხვა ვარიანტი იყო, ახლა ისინი სამი მოსწავლის ერთიდაიგივე შერჩევას წარმოადგენენ. ამიტომ წინა ამოცანასთან შედარებით ვარიანტების რაოდენობა 3!-ჯერ შემცირდება (3!

არის 3-ის ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა რაოდენობა) და საბოლოო პასუხი $A_5^3 \colon 3!$ იქნება.

თუ ამ ამოცანაში ისევ ზოგადად გვექნებოდა n და k, მაშინ იმავე მსჯელობით პასუხს მივიღებდით $A_n^k \colon k!$-ს. ეს რიცხვი აღინიშნება C_n^k-თი, $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, და მას n ობიექტისგან k სიგრძის *ჯუფდებათა* რაოდენობა ეწოდება. სიტყვები „გადანაცვლება“, „წყობა“ და „ჯუფდება“ ამ შემთხვევაში მათემატიკურ ტერმინებად გვევლინებიან და მათი შინაარსობრივი წარმომავლობაც გასაგებია. კიდევ ერთხელ მკაფიოდ წარმოვიდგინოთ, რომ C_n^k რიცხვი გვეუბნება n რაოდენობის ობიექტებიდან k ობიექტის შერჩევის რამდენი სხვადსხვა ვარიანტი არსებობს, როცა შერჩეულ ობიექტებში მათ თანმიმდევრობას მნიშვნელობა არ ენიჭება (ე.ი. 2,4,1 და 4,1,2 ერთიდაიგივე შერჩევაა), ხოლო A_n^k გვეუბნება იმავეს, როცა შერჩეულ ობიექტებში თანმიმდევრობაც მნიშვნელოვანია. (C_n^k რიცხვთა შინაარსიდან გამომდინარე და აგრეთვე მათი ფორმულიდან მიიღება, რომ $C_n^k = C_n^{n-k}$, რადგან k ობიექტის შერჩევა ბუნებრივად ნიშნავს დარჩენილი $n-k$ ობიექტის შერჩევასაც.) ამ მოსაზრებების გამოყენება ხშირად მოგვიწევს ალბათობის თეორიის კონკრეტული ამოცანების ამოხსნისას.

იმაში გასავარჯიშებლად, თუ როდის C_n^k რიცხვები უნდა გამოვიყენოთ და როდის A_n^k (როგორც ვხედავთ ისინი შინაარსით ჰგვანან ერთმანეთს) განვიხილოთ ასეთი ამოცანები: ა) *ვთქვათ 10 წევრისაგან შემდგარმა კლუბმა შემთხვევით უნდა აირჩიოს კლუბის თავჯდომარე, მისი მოადგილე და ხაზინადარი. სულ რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს?* ბ) *ვთქვათ იმავე კლუბმა უნდა აირჩიოს 3 კაციანი კომიტეტი. რამდენი ვარიანტია?* ორივე ამოცანაში 10 ობიექტიდან ვირჩევთ 3-ს, მაგრამ ა) შემთხვევაში არჩევანის თანმიმდევრობა მნიშვნელოვანია (ვიგულისხმეთ, რომ I არის თავჯდომარე, II-მოადგილე, ხოლო III-ხაზინდარი) ხოლო ბ)-ში არა. ამიტომ ა) ამოცანის პასუხია $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$, ხოლო ბ)-სი- $C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$.

ახლა განხილული კომბინტორიკის ფორმულების მეშვეობით ამოვხსნათ ალბათობის თეორიის რამოდენიმე საინტერესო სტანდარტული ამოცანა.

ამ. 5.1. *ვთქვათ მონეტას ვაგდებთ 3-ჯერ. რა არის ალბათობა იმისა, რომ სამივეჯერ მოვა „გერბი“.* ამ ამოცანაში კომბინატორიკას ვიყენებთ Ω–ში (ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეში) ელემენტების რაოდენობის დასათვლელად (ანუ, ფორმულა (1)-ში n-ის განსასაზღვრელად). დავაკვირდეთ, რომ მონეტის სამივე აგდების შედეგი მთლიანობაში განაპირობებს ერთი ცდის შედეგს, ანუ ელემენტარულ ხდომილობას. მაგალითად „საფასური, გერბი, საფასური“ ჩატარებული ცდის ერთ-ერთი შედეგია, რომელსაც პირობითად აღვნიშნავთ 010-ით (იხ. ე1 და ე2). ამის შემდგომ მარტივად ვხვდებით, რომ Ω შედგება 0-ებითა და 1-ებით ჩაწერილი სამციფრიანი სიმბოლოებისგან. როგორც ვნახეთ სულ ასეთი 8 სიმბოლოა (იხ. შემდგომი ამოცანა, სადაც ეს სიმბოლოები ჩამოთვლილია). ამიტომ $n = 8$. მოვლენა „სამივეჯერ მოვიდა გერბი“ პირობითი აღნიშვნებით ასე გამოიხატება 111. ეს ხდომილობა ერთადერთ ელემენტს შეიცავს (არ დაგვავიწყდეს, რომ ხდომილობა არის სიმრავლე და მის ელემენტებზეა ლაპარაკი) ე.ი. $k = 1$ (ფორმულა (1)-ში). საბოლოოდ $P = \frac{k}{n} = \frac{1}{8}$. ჩვენ ამ

ამოცანას სხვა მეთოდითაც ამოვხსნით, როდესაც დამოუკიდებელ ხდომილობებს შევისწავლით.

შეგვეძლო ამ ამოცანის ამოხსნისას ასე დაწვრილებით არ შევჩერებულიყავით Ω-ს აღწერაზე და მხდოლოდ მასში ელემენტების რაოდენობაზე გაგვემახვილებინა ყურადღება. ამ დროს ვიყენებთ ისევ ფორმულა (1)-ს ოღონდ მისი ფორმულირება ოდნავ ზერელე ხასიათს ატარებს და ვამბობთ ასე: n *არის ყველა შესაძლო ვარიანტის რაოდენობა და* k*- საძიებელი ალბათობის მქონე მოვლენის ხელშემწყობ ვარიანტთა რაოდენობა.* ამოხსნის ამგვარ მეთოდს განსაკუთრებით მაშინ ვიყენებთ ხოლმე, როცა Ω მრავალრიცხოვანია და მისი ზუსტად ჩაწერა ფაქტიურად შეუძლებელია. ოღონდ ამ დროს განსაკუთრებულ სიფრთხილის გამოჩენაა საჭირო, რათა უნებლიედ შეცდომა არ დავუშვათ. კერძოდ Ω-ს წინასწარ მკაფიოდ არ აღწერის გამო, რაიმე არ აგვერიოს. გასაგებია ისიც, რომ მოსწავლეებმა ამოხსნის მეორე გზა შეიძლება უფრო მოსახერხებლად, ნაკლებად საწვალებლად მიიჩნიონ. თუმცა როგორც აღვნიშნეთ იგი გარკვეულ რისკს შეიცავს შეცდომის დაშვების. ამიტომ ამოხსნის მეორე გზის გამოყენებისას, მეთოდოლოგიურადაც და მსჯელობის სისწორის დაზღვევის მიზნითაც, სასურველია თავიდან Ω სივრცის თუნდაც რამოდენიმე ელემენტის, ანუ ამოცანაში აღწერილი „შემთხვევითი ექსპერიმენტის“ რამოდენიმე ელემენტარული ხდომილობის დასახელება, ხოლო შემდგომ მათი მთლიანი რაოდენობის დათვლა.

ახლა ოდნავ გავართულოთ პირველი ამოცანა:

ამ. 5.2. *ვთქვათ მონეტას ვაგდებთ ისევ 3-ჯერ. რა არის ალბათობა იმისა, რომ გერბი მოვა ზუსტად ორჯერ.* ამ ამოცანის ამოხსნისას ალბათ უკვე დაგვჭირდება Ω-ს ყველა ელემენტის ჩამოთვლა. როგორც უკვე ვახსენეთ იგი 8 ელემენტისაგან შედგება. მიუხედავად იმისა, რომ ვაპირებთ Ω-ს მთლიანი სურათის აღწერას, მისი ელემენტების რაოდენობის წინასწარი განსაზღვრა კომბინატორიკის მეშვეობით სასურველია, რათა ელემენტები გარკვეული სისტემით და ორგანიზებულად ჩამოვთვალოთ, არც ერთი წევრი არ გამოგვრჩეს და რომელიმე მათგანი ორჯერ არ გავიმეოროთ. მაშ ასე $\Omega=\{000,001,010,011,100,101,110,111\}$. ახლა დავაკვირდეთ, ჩამოთვილილი ელემენტებიდან რამდენ მათგანშია ზუსტად ორი 1-იანი. ასეთი სულ სამია 011,101 და 110. მაშასადამე საძიებელი ალბათობა არის $P=\frac{3}{8}$.

შეგვეძლო თუ არა იგივე ამოცანა ამოგვეხსნა ზემოთ ნახსენები ე.წ. მეორე მეთოდით Ω სივრცის ასე დაწვრილებით აღწერის გარეშე, კომბინატორიკის უფრო მძლავრად გამოყენებით. ცხადია შეგვეძლო, თუმცა ამისთვის შეიძლება უფრო მეტი გამოცდილება და პრაქტიკა იყოს საჭირო ვიდრე ჩვენ მხოლოდ ყოველივე ზემოთ ნახსენების წაკითხვით დავაგროვებდით. შევეცადოთ გავიფართოვოთ ეს გამოცდილება. ისევ და ისევ ფორმულა (1)-ში $n=8$-ს, ანუ 3 აგდებისას გერბისა და საფასურის მოსვლათა ყველა შესაძლო ვარიანტის რაოდენობაა 8. რამდენია ამ ვარიანტთაგან „ხელშემწყობი“ იმისა რომ გერბი ზუსტად 2-ჯერ მოვიდეს? ანუ რას უდრის k (1) ფორმულაში? წარმოვიდგინოთ, რომ გვაქვს 3 ცარიელი ადგილი □□□. ორ ადგილზე 1-იანი (ანუ „გერბი“) და დარჩენილ ერთ ადგილზე 0-იანი (ანუ „საფასური“) შეგვიძლია ჩავსვათ იმდენი სხვადასხვა გზით ამ ცარიელ უჯრედებში რამდენი 2 ადგილის ამორჩევაც

შეგვიძლია ამ 3 ადგილიდან. თანაც ადგილების ამორჩევისას მათ თანმიმდევრობას აზრი არა აქვს, ე.ი. ისინი შეგვიძლია უბრალოდ ერთდროულად მოვნიშნოთ. მაშასადამე, ვარიანტების ეს რაოდენობა გამოიხატება C_3^2-ით, როგორც ჩვენ ჯუფდების რიცხვთა თვისებები აღვწერეთ კომბინატორიკის ელემენტების განხილვისას. მართლაც $C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$ და ამოცანის პასუხი $^3/_8$ იგივე მიიღება.

განვიხილოთ ახლა ისეთი ამოცანები, რომლებშიც ყველა შესაძლო ვარიანტების ჩამოწერა, მათი მრავალრიცხოვნობის გამო, ფაქტიურად შეუძლებელია და ამ ვარიანტების რაოდენობის დასათვლელად კომბინატორიკის მეთოდების აქტიური გამოყენებაა საჭირო.

ამ. 5.3. *ვთქვათ ურნაში 20 ერთიდაიგივე ზომის ბურთულაა, 12 თეთრი და 8 შავი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 5 შემთხვევით ამოღებული ბურთულიდან 5-ვე თეთრია.*

ამოხსნა. შევეცადოთ დავადგინოთ რისგან შედგება Ω და ამისათვის შემოვიღოთ შესაბამისი პირობითი აღნიშვნები. წარმოვიდგინოთ, რომ ეს ბურთულები გადანომრილია $1,2,3\cdots,19,20$. ამასთან 1-დან 12-მდე თეთრი ბირთულებია, ხოლო შემდგომ შავი. ჩამოვთვალოთ ამოცანაში განხილული „შემთხვევითი ექსპერიმენტების“ რამოდენიმე შესაძლო შედეგი და გაგვიადვილდება მივხვდეთ თუ რას წარმოადგენს მთლიანად Ω. ვთქვათ 8,2,7,19,1 (ცხადია რიცხვების ეს ჩამონათვალი მიუთითებს, რომ ამოღებულია შესაბამისი ნომრის ბურთულები. რახან ბურთულებს ვიღებთ ყველას ერთად, ერთ გროვად, სავალდებულო არაა ეს ნომრები ზრდის მიხედვით დავალაგოთ) ან 3,8,12,20,4. კიდევ შეგვეძლო ბევრი ასეთი ხუთეული ჩამოგვეწერა, მაგრამ ყველა მათგანს ნამდვილად ვერ ჩამოვწერთ. სამაგიეროდ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომ სწორედ ყველა შესაძლო ასეთი ხუთეულების სიმრავლე შეადგენს Ω-ს (ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეს) და კომბინატორიკის გამოყენებით დავთვალოთ მასში ელმენტების რაოდენობა, ანუ 20 რიცხვიდან 5 რიცხვის შერჩევის ყველა შესაძლო ვარიანტთა რაოდენობა. როგორც ზემოთ ვთქვით, რადგან შერჩეული 5 რიცხვის თანმიმდევრობას არ ენიჭება მნიშვნელობა, ეს რაოდენობა წარმოადგენს C_{20}^5-ს. მაშასადამე ფორმულა (1)-ში $n = \frac{20!}{15!5!}$-ს. (ვინაიდან ურნაში ჩაყრილი ბურთების ზომა ერთნაირია, ფერის მიუხედავად. არცერთ არჩევანს სხვებთან შედარებით უპირატესობა არ გააჩნია. ე.ი. ალბათობები თანაბრადაა განაწილებული ელემენტარულ ხდომილობებზე და შეგვიძლია გამოვიყენოთ ფორმულა (1)).

ახლა დავაკვირდეთ ამ 5-ეულებიდან (Ω-ს ელემენტებიდან) რომელნი მათგანნი წარმოადგენენ ამოცანის პირობაში აღწერილ მოვლენას, რომ „ხუთივე ბურთულა თეთრია“. ცხადია 2,7,8,9,12 წარმოადგენს ასეთს, ხოლო 8,9,12,14,15-არა. ე.ი. 5-ივე რიცხვი უნდა იყოს 1-დან 12-მდე და როგორც ვნახეთ, ამგვარ შესაძლო ვარიანტთა რაოდენობა არის C_{12}^5 (ადრე ეს ვარიანტები ჩვენ მოვიხსენიეთ როგორც „საძიებელი ალბათობის მქონე მოვლენის ხელშემწყობი ვარიანტები“) ე.ი. ფორმულა (1)-ში k ტოლია $\frac{12!}{7!5!}$-ის და საბოლოოდ საძიებელი ალბათობა ტოლია $P = C_{12}^5 \,/\, C_{20}^5$-ის.

ამ. 5.4. *იმავე ამოცანაში* (ამ. 5.3) *ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთები 3 თეთრია და 2 შავი.*

ამოხსნა: Ω-ზე ყველაფერი ისევე ითქმება როგორც წინა ამოცანაში ანუ $n = C_{20}^{5}$. ამოღებული 5 ბურთულა ამოცანის პირობაში აღწერილ მოვლენას რომ გამოხატავდეს, მაშინ 1-დან 12-მდე 3 ნომერი უნდა ამოვარჩიოთ, ხოლო 13-დან 20-მდე—2, როგორიცაა ვთქვათ 2,5,7,15,16 ან 3,4,12,17,20 და არა 2,5,13,14,19. ამიტომ სულ ამგვარი 5 რიცხვის შერჩევის ვარიანტია C_{12}^{3} (რამდენი 3 რიცხვიც შეგვიძლია ავიღოთ 12 რიცხვიდან, თანმიმდევრობის გათვალისწინების გარეშე) გამრავლებული C_8^2-ზე (რამდენი 2 რიცხვიც შეგვიძლია ავირჩიოთ დარჩენილი 8-დან, ისევ თანმიმდევრობის გათვალისწინების გარეშე). ანუ $k = C_{12}^{3} \cdot C_8^2$ (ამ რიცხვებს ვამრავლებთ, რადგან შეგვიძლია გამოვიყენოთ დაახლოვებით იგივე მსჯელობა, რაც „დათვლის უნივერსალური პრინციპის" ახსნისას. წარმოვიდგინოთ, რომ 5 ბურთულა შეირჩევა ორ ბიჯად. I ბიჯზე შეირჩევა 3 თეთრი ბურთულა, ხოლო II-ზე — 2 შავი ბურთულა) და ამოცანის საბოლოო პასუხია $P = \frac{C_{12}^{3} \cdot C_8^2}{C_{20}^{5}}$.

ზემოთ ამოხსნილ ორივე ამოცანაში ჩვენ ვიყენებდით მხოლოდ C რიცხვებს (ჯუფდებებს). ახლა ამოვხსნათ ისეთი ამოცანებიც რომლებშიც ამორჩევის რიგს მნიშვნელობა ექნება და შესაბამისად გამოვიყენებთ A რიცხვებს.

ამ. 5.5. *ვთქვათ ამ.* 5.3-*ის პირობებში ვიღებთ* 2 *ბურთულას თანმიმდევრობით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ პირველი ბურთულა შავია, ხოლო მეორე თეთრი.*

თუმცა ამ ამოცანაში ფაქტიურად შეუძლებელია ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ჩამოწერა, ანუ Ω-ის ცხადი სახით აგება, აუცილებლად უნდა დავიწყოთ მისი თუნდაც რამოდენიმე ელემენტის ჩამოწერით, როგორც ეს ზემოთ იყო ზოგადად რეკომენდირებული. ჯერ გადავნომროთ ბურთულები. როგორც ეს ამ. 4-ის ამოხსნისას დავიწყეთ: 1-დან 12-მდე—თეთრი და 13-დან 20-მდე—შავი. მაშინ Ω შედგება დალაგებული წყვილებისგან, $\Omega = \{(3,7); (12,8); (20,7); \dots\}$. კიდევ ერთხელ გავუსვათ ხაზი, რომ ამ ჩამონათვალში (20,7)-თან ერთად ცალკე უნდა შედიოდეს (7,20)-იც, რადგან ისინი შინაარსობრივადაც სხვადასხვა რეზულტატს წარმოადგენენ (პირველი წყვილი წარმოადგენს ამოცანისთვის ხელშემწყობ პირობას, ხოლო მეორე—არა). მაშასადამე სულ Ω-ში იქნება $A_{10}^{2} = 19 \cdot 20 = 380$ ელემენტი.

რამდენი მათგანი იქნება „ხელშემწყობი"? მოდით ჩამოვთვალოთ რამოდენიმე მათგანი $(13,4); (15,12); (20,8)$. მათ დასათვლელად არც ჯუფდებები გამოგვადგება და არც წყობები. პირდაპირ დათვლის უნივერსალური პრინციპი უნდა გამოვიყენოთ. წარმოვიდგინოთ, რომ გვაქვს ორი ცარიელი უჯრა $\square\square$ პირველად და მეორედ ამოღებული ბურთულებისთვის პირველ უჯრაში 8 რიცხვის ჩაწერის ვარიანტია, მეორეში—12-ის. მაშასადამე სულ $8 \cdot 12 = 96$ ვარიანტია.

საბოლოოდ ამოცანის პასუხი იქნება $P = 96/380 = 24/95$. ამ ამოცანის ამოხსნას ჩვენ გავიმეორებთ სხვა გზითაც, როცა პირობით ალბათობას ვისწავლით.

ახლა ამოვხსნათ კიდევ ერთი, შედარებით უფრო რთული ამოცანა წყობების გამოყენებით.

ამ. 5.6. ვთქვათ გვაქვს 5 წიგნი, მათ შორის ერთი ქართულის და ერთი მათემატიკის. ამ წიგნებს ვაწყობთ თაროზე შემთხვევით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ქართულის და მათემატიკის წიგნები ერთმანეთის გვერდიგვერდ მოხვდებიან.

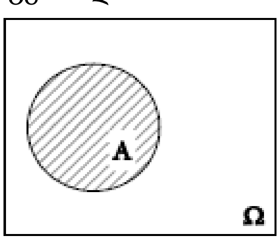
ამოხსნა: ეს წიგნები გადავნომროთ ისე, რომ ვთქვათ 1 იყოს ქართულის წიგნი და 2 –მათემატიკის. მაშინ წიგნების თაროზე დაწყობას შეესაბამება $\{1,2,3,4,5\}$-ის გადანაცვლება და, როგორც ვიცით, ამის სულ $5!$ შესაძლებლობაა. ე.ი. Ω შედგება $5!$ ელემენტისგან. ახლა დავაკვირდეთ მათგან რომლებია „ამოცანის პირობის ხელშემწყობნი“. ამისათვის წარმოვიდგინოთ, რომ წიგნები 1 და 2 ერთადაა შეკრული და უკვე მიღებული 4 ელემენტის გადანაცვლებები გავაკეთოთ. სულ გვექნება $4!$ გადანაცვლება. ამასთანავე თითოეულ გადანაცვლებაში ქართულისა და მათემატიკის წიგნები შეგვიძლია დავალაგოთ ორი თანმიმდევრობით $1{,}2$ და $2{,}1$. მაშასადამე სულ ვარიანტების რაოდენობა იქნება $4!\cdot 2$ და ამოცანის პასუხი გამოდის $P=\frac{4!\cdot 2}{5!}=\frac{2}{5}$

ახლა ჩვენ შემოგთავაზებთ კიდევ რამოდენიმე მსგავს ამოცანას, რომელთა ამოხსნას აღარ მოვიტანთ და პირდაპირ პასუხს მივუწერთ (შეიძლება დავურთოთ პატარა კომენტარები). ზემოთ დაწვრილებით განხილული ამოცანების ფონზე, იმედია მკითხველი თვითონ ჩაატარებს შესაბამის სწორ მსჯელობას, რაშიც ამოცანის პასუხიც დაეხმარება, და თავად დარწმუნდება მათ სისწორეში.

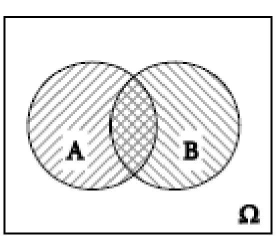
სავარჯიშო. ვთქვათ გვაქვს 52 კარტი (გული, აგური, ჯვარი და ყვავი, თითოეული 13) და შემთხვევით ვიღებთ 5 კარტს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულ კარტებში: ა) 5-ივე გულია (პას: $P=\frac{C_{13}^5}{C_{52}^5}$); ბ) 3 გულია და 2 ჯვარი (პას: $P=\frac{C_{13}^3\cdot C_{13}^2}{C_{52}^5}$); გ) 3 გულია (პას: $P=\frac{C_{13}^3\cdot C_{39}^2}{C_{52}^5}$); დ) 3 გულია, 1 ჯვარი და 1 ყვავი (პას: $P=\frac{C_{13}^3\cdot 13\cdot 13}{C_{52}^5}$); ე) 3 ტუზია და 2 ვალეტი (პას: $P=\frac{C_4^3\cdot C_4^2}{C_{52}^5}$); ვ) 3 ტუზია (პას: $P=\frac{C_4^3\cdot C_{48}^2}{C_{52}^5}$); ზ) 4 ტუზია და 1 ყვავი (პას: $P=\frac{13}{C_{52}^5}$, *4 ადგილი ფიქსირებულია და რჩება 1 თავისუფალი ადგილი* 13 *ყვავისთვის*); თ) 4 ტუზია (პას: $P=\frac{48}{C_{52}^5}$); ი) არის ჯვრის ტუზი (პას: $P=\frac{C_{51}^4}{C_{52}^5}$, ერთი კარტი ფიქსირებულია და რჩება 4 თავისუფალი ადგილი დარჩენილი 51 კარტისთვის)

პირობითი ალბათობა.

მოდით კიდევ ერთხელ დავუბრუნდეთ მე-2 ქვეთავში აღწერილ სურათს, რომელიც ჩვენ ალბათობის თეორიის ყველანაირი საწყისი მარტივი ამოცანის ამოხნის ზოგად



სქემად დავსახეთ. „ერთეულოვან კვადრატზე, რომელზეც დაშტრიხული გვაქვს A ფიგურა, შემთხვევით ეცემა ნემსის წვერი. რისი ტოლია იმის ალბათობა, რომ ნემსი დაეცემა A ფიგურაში?“ (აქ მკითხველს ვთხოვთ კიდევ ერთხელ გადაიკითხოს მე-2 ქვეთავის ბოლო აბზაცი) როგორც ვნახეთ ეს ალბათობა ტოლია $P(A)=S(A)/S(\Omega)=S(A)$-ის. ახლა ამავე სქემაში დავსვათ ასეთი ამოცანა. *„ვთქვათ*



ვიღაცამ უკვე შეგვატყობინა დამატებითი ინფორმაცია, რომ ნემსი ჩავარდა დაშტრიხულ B ფიგურაში. ამ ინფორმაციის ფონზე როგორი გახდა შანსი იმისა, რომ ნემსი იმავდროულად ჩავარდა A

ფიგურაშიც?" თუ გავიხსენებთ, რომ ნემსის წვერის ჩავარდნა, ანუ კვადრატიდან შემთხვევით ერთი წერტილის ამორჩევა, იყო შემთხვევითი ექსპერიმენტის მოდელი, ხოლო მისი მიკუთვნება A თუ B სიმრავლეს უკეთებდა მოდელირებას შესაბამისი მოვლენის მოხდენას, ეს უკანასკნელი კითხვა შეგვიძლია ამგვარადაც გადავთარგმნოთ: *რისი ტოლია A-ს მოხდენის ალბათობა იმ პირობაში როცა უკვე ვიცით, რომ B მოხდა?* ამ ალბათობას ჰქვია **პირობითი ალბათობა** და იგი აღინიშნება ამგვარად $P(A|B)$.

ახლა დავადგინოთ პირობითი ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულა. ცოდნა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული წერტილი აღებულია B-დან, საშუალებას გვაძლევს დავივიწყოთ Ω-ს დანარჩენი წერტილები ($\Omega \setminus B$) და თვითონ B-ს შევხედოთ როგორც ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეს, ანუ B ჩავთვალოთ აუცილებელ ხდომილობად და მისი ფართობი პირობითად მივიჩნიოთ 1-ის ტოლად. ამ სიტუაციაში A-ს მოხდენა ნიშნავს, რომ B-ში შემთხვევით შერჩეული წერტილი იმავდროულად არის A-შიც. მაშასადამე იგი უნდა იყოს $A \cap B$-ში და პირობითი მოვლენის (B-დან შემთხვევით არჩეული წერტილი მოხვდა $A \cap B$-ში) ალბათობა ტოლი იქნება იმ პორციისა რასაც $A \cap B$ შეადგენს B-დან. (მსგავსი მსჯელობა ჩავატარეთ (3) ფორმულის გამოყვანისას) მივიღებთ პირობითი ალბათობის განმსაზღვრელ კარგად ცნობილ ფორმულას:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (8)$$

(ამ ფორმულის გამოყვანისას ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $P(B) \neq 0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში პირობითი ალბათობა არ განიმარტება.)

ამ. 6.1. ვთქვათ ვიცით, რომ კამათელი გაგორდა ლუწ რიცხვზე. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კამათელი გაგორდა „6"-ზე.

ამოხსნა: გვაქვს $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\},\ B = \{2,4,6\}$ და $A = \{6\}$. უნდა ვიპოვოთ $P(A|B)$, რაც (8) ფორმულის ძალით უდრის $P\{6\}/P\{2,4,6\} = 1/6 : 3/6 = 1/3$-ს.

ამ. 6.2 ვთქვათ მონეტას ვაგდებთ 2-ჯერ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მეორე აგდებაზე დავარდა „გერბი" თუკი ვიცით, რომ პირველ აგდებაზე დავარდა „საფასური".

ამოხსნა: გვაქვს $\Omega = \{00,01,10,11\}$ (იხ. ე2), $B = \{00,01\}, A = \{01,11\}$, და ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, ისევ უნდა ვიპოვოთ $P(A|B)$ რაც უდრის $P\{11\}/P(B) = 1/4 : 1/2 = 1/2$.

შევნიშნოთ, რომ ორივე ეს ამოცანა შეიძლება ლოგიკურად ამოვხსნათ უშუალოდ იმ მსჯელობის გამოყენებით, რომელიც ჩავატარეთ (8) ფორმულის გამოსაყვანად, ანუ ჯერ დაგვედგინა ახალი ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე და შემდეგ ამ სივრცისთვის გამოგვეყენებინა (1) ფორმულა. მკითხველს ვურჩევთ გაიაზროს ამ ამოცანების ამოხსნის ეს გზაც და იმავე პასუხების მიღების სხვა შესაძლებლობაც.

ხანდახან ამოცანების ამოხსნისას (8) ფორმულას ვიყენებთ

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \qquad (9)$$

სახით. შევნიშნოთ, რომ იგივე ფორმულა შეგვეძლო ჩაგვეწერა $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ სახითაც. მართლაც ამ დროს ვიყენებთ B-ს პირობით ალბათობას, იმ პირობაში, რომ A მოხდა, რაც (8) ფორმულის ძალით ტოლია

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$-ის. გამოვიყენოთ (9) ფორმულა ამ. 5.6-ის ამოსახსნელად, რომელიც ადრე ჩვენ კომბინატორიკის მეთოდებით ამოვხსენით.

ამ. 6.3= ამ. 5.6. ურნაში არის 12 თეთრი და 8 შავი ბურთულა. ვიღებთ თანმიმდევრობით 2 ბურთულას. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ პირველი ბურთულა შავია, ხოლო მეორე თეთრი.

ამოხსნა: მოვლენები აღვწეროთ სიტყვიერად. B იყოს მოვლენა, რომ „ორი ბურთულის თანმიმდევრობით ამოღებისას პირველი ბურთულა შავია", ხოლო A იყოს მოვლენა, რომ „მეორე ამოღებული ბურთულა თეთრია". ამოცანის პირობა გვეკითხება $P(A\cap B)$-ს. ვისარგებლოთ (9) ფორმულით ოღონდ $P(A|B)$ გამოვთვალოთ „ლოგიკური მსჯელობით" და არა (8) ფორმულით. მართლაც, ეს გაცილებით იოლიცაა. თუ ვიცით, რომ B მოხდა, მაშინ ურნაში იქნება 12 თეთრი და 7 შავი ბურთულა და ამ პირობებში თეთრი ბურთულის ამოღების ალბათობაა $P(A|B)=\frac{12}{19}$. საბოლოოდ გვექნება $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)=\frac{8}{20}\cdot\frac{12}{19}=\frac{24}{95}$ რაც ემთხვევა ადრე მიღებულ პასუხს.

საინტერესოა, რომ ამ ამოცანის ამგვარი გზით ამოხსნისას ჩვენ გვერდი ავუარეთ Ω-ს აგებას, რასაც ტრადიციულად ვაკეთებდით, თუნდაც იმავე ამოცანის კომბინატორიკის გამოყენებით ამოხსნისას.

მკითხველს ამ ეტაპზე საშუალება ეძლევა თვითშემოწმების მიზნით კიდევ ერთხელ კარგად გაიაზროს ამ უკანასკნელი ამოცანის ორი სხვადასხვა გზით ამოხსნა და პასუხების დამთხვევის შინაგანი მიზეზი.

დამოუკიდებელი ხდომილობები. პროგრამაში, სწავლების მეთოდიკიდან გამომდინარე, ჯერ *დამოუკიდებელი ხდომილობები* გვხდება, ხოლო შემდეგ პირობითი ალბათობა, რადგან ეს უკანასკნელი ცნება გასააზრებლად შედარებით უფრო რთულია ვიდრე დამოუკიდებლობის ცნების ფორმალური განმარტება. მიუხედავად ამისა ჩვენ მიგვაჩნია, რომ დამოუკიდებელი ხდომილობების შინაარსში ბოლომდე ჩაწვდომა მხოლოდ პირობითი ალბათობის კარგად გაგების შემდეგაა შესაძლებელი, ამიტომ ამ საკითხთა გადმოცემისას სწორედ აქ მოტანილი თანმიმდევრობა შევარჩიეთ.

დამოუკიდებლობის ცნების შესწავლა შემდეგი სტანდარტული ამოცანის განხილვით დავიწყოთ.

ამ. 7.1. ვთქვათ ვაგორებთ ორ კამათელს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ პირველი კამათელი გაგორდა „2"-ზე, ხოლო მეორე–„4"-ზე.

ცხადია ეს ამოცანა შეგვიძლია ამოვხსნათ ადრე აღწერილი მეთოდებითაც. კერძოდ ავაგოთ Ω სივრცე (იხ. ე3) და გამოვიყენოთ (1) ფორმულა. (პასუხი იქნება $\frac{1}{36}$). მაგრამ, ამჟამინდელი მიზნების განსახორციელებლად, ავირჩიოთ ამოხსნის სხვა გზა. A-თი აღვნიშნოთ ხდომილობა, რომ „ორი კამათლის გაგორებისას პირველი კამათელი გაგორდა „2"-ზე (ე.ი. $A=\{(2;1),(2;2),\cdots,(2;6)\}$) და B-თი აღვნიშნოთ ხდომილობა, რომ „მეორე კამათელი გაგორდა „4"-ზე (ე.ი. $B=\{(1;4),(2;4),\cdots,(6;4)\}$). ინტუიციურად ცხადია, რომ ეს ორი მოვლენა ერთმანეთთან არავითარ კავშირში არაა. კერძოდ ერთ-ერთი მათგანის მოხდენა ან არ მოხდენა არავითარ გავლენას არ ახდენს იმის შანსებზე მოხდება თუ არა მეორე. უფრო ზუსტად, ამ მოვლენების შინაარსიდან

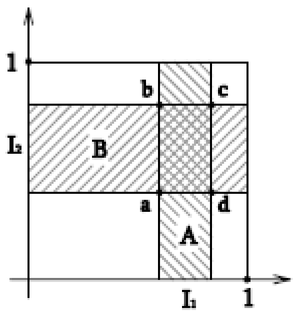
გამომდინარე, თუკი ვიცით რომ B მოხდა (ანუ ორი კამათლის გაგორებისას მეორე დაჯდა „4“-ზე) ეს ინფორმაცია უცვლელს დატოვებს A-ს მოხდენის ალბათობას. ამ დროს ბუნებრივად შემოდის განსაზღვრება, რომ A და B მოვლენებს (ხდომილობებს) ეწოდათ **დამოუკიდებელი**. ხოლო პირობითი ალბათობის განსაზღვრას თუ გავიხსენებთ, დამოუკიდებლობის ცნებას ამგვარი ფორმულით გამოვხატავთ $P(A|B) = P(A)$ (ამ ფორმულას ზუსტად იგივე შინაარსი აქვს რაც ახლახანს სიტყვებით აღვწერეთ), რაც თავის მხრივ, (8) ფორმულის გათვალისწინებით, ტოლფასია შემდეგი იგივეობის

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{10}$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა წარმოადგენს დამოუკიდებელი ხდომილობების მათემატიკურ განსაზღვრას და ხშირად მას ვაწყდებით ალბათობის თეორიის სახელმძღვანელოებში დამატებითი ახსნა-განმარტებების გარეშე. ე.ი. საზოგადოდ A და B ხდომილობებს ეწოდებათ დამოუკიდებელი თუკი სრულდება (8) ტოლობა. ამ განსაზღვრის ჩამოყალიბებას ჩვენ ვივიწყებთ A და B მოვლენების კონკრეტულ შინაარსს და (10) ფორმულის სამართლიანობის და მიხედვით ვწყვეტთ დამოუკიდებელნი არიან თუ არა ისინი (იხ. ამ. 7.2 ქვემოთ). თუმცა ხშირად ამოცანების ამოხსნისას სწორედ A და B მოვლენების შინაარსი გვეუბნება, რომ ისინი დამოუკიდებელნი არიან, რაც (8) ფორმულის სამართლიანობას უზრუნველყოფს. ზუსტად ამგვარად შეგვიძლია მოვიქცეთ ამ. 7.1-ის ამოხსნისას. ვინაიდან I და II კამათლები ერთმანეთზე არავითარ გავლენას არ ახდენენ, ამიტომ ამოცანის პირობის ჩამოყალიბების შემდგომ განსაზღვრული A და B ხდომილობები დამოუკიდებელია. ამასთანავე $P(A) = \frac{1}{6} = P(B)$ და ხდომილობა, რომლის ალბათობასაც ვეძებთ, გამოიხატება თანაკვეთით $A \cap B$, ანუ A-ს და B-ს ერთდროულად შესრულებით. მაშასადამე, (8) ფორმულის ძალით, $P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ და მივიღეთ იგივე პასუხი.

ამ. 7.2 კომპიუტერული სიმულაციებით ჩატარებული 1000 შემთხვევით ექსპერიმენტში A ხდომილობა განხორციელდა 320-ჯერ, B ხდომილობა-216-ჯერ, ხოლო ორივე ერთად-69 -ჯერ. შეგვიძლია თუ არა ეს ხდომილობები ჩავთვალოთ დამოუკიდებლად.

ამოხსნა: (2) ფორმულის ძალით $P(A) \approx 0.32$ და $P(B) \approx 0.216$. ამასთანავე $P(A \cap B) \approx 0.69$ ე.ი. $P(A) \cdot P(B)$ საკმარისად ახლოსაა $P(A \cap B)$-სთან, ასე რომ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ (8) ტოლობა სრულდება და A და B დამოუკიდებელია.



ამ ამოცანის განხილვისას აღსანიშნავია, რომ ჩვენ დავასკვენით A და B მოვლენების დამოუკიდებლობა მათი შინაარსის ყოველგვარი ცოდნის გარეშე. ამით ხაზგასმით უნდა აღვნიშნოთ, რომ ალბათობის თეორიაში „დამოუკიდებლობა“ მათემატიკური ტერმინია და არ იხმარება მხოლოდ საყოფაცხოვრებო აზრით. დამოუკიდებელი ხდომილობების თვალსაჩინოდ წარმოდგენის მიზნით შემდეგ სურათს მივმართოთ. საკოორდინატო სიბრტყეზე ავიღოთ ერთეულოვანი კვადრატი, რომელიც იყოს Ω-ს მოდელი. ხდომილობა A იყოს $I_1 \times [0.1]$ ტიპის სიმრავლე, სადაც $I_1 \subset [0,1]$ ($\times$ არის დეკარტული ნამრავლის სიმბოლო, იხ. თემა „ფუნქციები“), ხოლო ხდომილობა B იყოს $[0.1] \times I_2$ ტიპის სიმრავლე სადაც $I_2 \subset [0.1]$ შინაარსობრივად A და B ხდომილობების დამოუკიდებლობა გამოიხატება იმ ფაქტში, რომ Ω-ში შემთხვევით ერთი წერტილის არჩევის შემდეგ (შემთხვევითი ექსპერიმენტის ჩატარების შემდეგ) მოხდა თუ არა მოვლენა A დამოკიდებულია ამ წერტილის მხოლოდ პირველ კოორდინატზე, ხოლო მოხდა თუ არა მოვლენა B დამოკიდებულია ამ წერტილის მხოლოდ მეორე კოორდინატზე. ვინაიდან შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ წერტილის შემთხვევით შერჩევისას მისი I და II კოორდინატები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად შეირჩა, უნდა ველოდოთ რომ A და B მოვლენებიც ერთმანეთისგან დამოუკიდებელია. ამასვე მიგვითითებს შესაბამისი ფორმულები $P(A) = S(I_1 \times [0.1]) = |I_1|$, $P(B) = S([0.1] \times I_2) = |I_2|$, $P(A \cap B) = S(abcd$ მართკუთხედი$) = |I_1| \cdot |I_2| = P(A) \cdot P(B)$. ყოველთვის, როცა დამოუკიდებელ ხდომილობებზე ვსაუბრობთ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ სურათზე გამოხატული სიტუაცია, რაც გააიოლებს ამ ცნების გააზრებას.

ამ. 7.3. I ყუთში 3 თეთრი ბურთულაა და 2 შავი, ხოლო II ყუთში-5 თეთრი ბურთულაა და 1 შავი. ზურა იღებს ერთ ბურთულას I ყუთიდან, ხოლო ეკა$-$II ყუთიდან. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ ერთ-ერთი მათგანი მაინც ამოიღებს ყუთიდან თეთრ ბურთულას.

ამოხსნა: A იყოს ხდომილობა, რომ ზურამ ამოიღო თეთრი ბურთი I ყუთიდან, ხოლო B იყოს ხდომილობა, რომ ეკამ ამოიღო თეთრი ბურთი II ყუთიდან. საძიებელი არის $A \cup B$ ხდომილობის ალბათობა $P(A \cup B)$. ამასთანავე ცხადია, რომ $P(A) = \frac{3}{5}$ და $P(B) = \frac{5}{6}$, რომ დაგვეშვა შეცდომა და გვესარგებლა (4) ფორმულით, მივიღებდით $P(A \cup B) = \frac{3}{5} + \frac{3}{6} = \frac{43}{30} > 1$ რაც აბსურდია, რადგან ალბათობა არ შეიძლება იყოს 1-ზე მეტი. თუ გავაანალიზებთ შეცდომის მიზეზს მივხვდებით, რომ (4) ფორმულის გამოყენების უფლება არ გვქონდა რადგან $A \cap B \neq \emptyset$ (მართლაც, სავსებით შესაძლებელია ზურას ამოღებული ბურთიც თეთრი იყოს და ეკასიც.) ამიტომ უნდა ვისარგებლოთ (5) ფორმულით. ამასთანავე გამოვიყენოთ, რომ A და B ხდომილობები დამოუკიდებელია. ამ დასკვნას ჩვენ ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე ვაკეთებთ. მართლაც I ყუთიდან ბურთულას ამოღება ხდება აბსოლუტურად განცალკევებულად II

ყუთისგან. მივიღებთ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{5}+\frac{5}{6}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{14}{15}$.

ინტუიცია გვკარნახობს, რომ თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ ასეთივე უნდა იყოს ა) $\bar{A}$ (A-ს არ მოხდენა) და B; ბ) A და $\bar{B}$; და გ) $\bar{A}$ და $\bar{B}$. ეს შეგვიძლია მკაცრად მათემატიკურადაც დავამტკიცოთ: ა) გვაქვს $\bar{A}\cap B=(\Omega\setminus A)\cap B=B\setminus(A\cap B)$. ამიტომ $P(\bar{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)\cdot P(B)=P(B)\big(1-P(A)\big)=P(B)\cdot P(\bar{A})$; ბ) მიიღება ა)-სგან თუკი A-ს და B-ს სახელებს შევუცვლით; გ) გვაქვს $\bar{A}\cap\bar{B}=\Omega\setminus(A\cup B)$. ამიტომ $P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-\big(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\big)=1-P(A)-P(B)+P(A)\cdot P(B)=\big(1-P(A)\big)\big(1-P(B)\big)=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})$ (მკითხველს ვურჩევთ დაკვირვებით მიადევნოს თვალი ამ გადასვლების სამართლიანობას).

ამ. 7.4. ალბათობა იმისა, რომ გია წარმატებით ჩააბარებს მათემატიკის გამოცდას ტოლია 0,8-ის, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ იგი წარმატებით ჩააბარებს ინგლისური ენის გამოცდას ტოლია 0,7-ის. ამ ორი გამოცდის ჩაბარება ერთმანეთისგან დამოუკიდებელია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ გია წარმატებით ჩააბარებს მათემატიკის გამოცდას, ხოლო ინგლისური ენის გამოცდას ვერა.

ამოხსნა: A იყოს მათემატიკის გამოცდის ჩაბარების ხდომილობა, ხოლო B – ინგლისურის ენის ჩაბარების. საძიებელია $P(A\cap\bar{B})$ პირობის ძალით $P(A)=0.8$ და $P(B)=0.7$. საიდანაც $P(\bar{B})=0.3$ ვინაიდან A და B დამოუკიდებელია, ასეთივე იქნება A და $\bar{B}$-ც. მივიღებთ $P(A\cap\bar{B})=P(A)\cdot P(\bar{B})=0.8\cdot 0.3=0.24$.

დამოუკიდებელი ხდომილობების ცნება შეიძლება განზოგადდეს ორზე მეტი ხდომილობისათვის. როგორც შინაარსობრივად ისე მათემატიკური ფორმულირების თვალსაზრისით განზოგადოებული სიტუაცია აბსოლუტურად მსგავსია იმ შემთხვევის, როცა ხდომილობათა რაოდენობა არის ორი. მოვიტანოთ პირდაპირ მათემატიკური განსაზღვრა: $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ხდომილობებს ეწოდებათ (ერთობლიობაში) დამოუკიდებელი თუკი პირველი n ნატურალური რიცხვის ნებისმიერი $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ ქვესიმრავლისთვის გვაქვს

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdot P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}). \qquad (11)$$

(შევნიშნოთ, რომ ამ მოვლენათა დამოუკიდებლობა არ ნიშნავს მხოლოდ მათ წყვილ-წყვილად დამოუკიდებლობას. კერძოდ, მაგალითად არსებობს 3 წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელი სიმრავლე, რომლებიც ერთობლიობაში არ არიან დამოუკიდებელნი).

ამ. 7.5. ვთქვათ კამათელს ვაგორებთ 3-ჯერ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ პირველად გაგორდება „1“, მეორედ–„2“, ხოლო მესამედ–„3“.

ამოხსნა. პირობაში ჩამოთვლილი ხდომილობები აღვნიშნოთ A_1-ით, A_2-ით და A_3-ით. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე ეს ხდომილობები დამოუკიდებელია. საძიებელია $P(A_1\cap A_2\cap A_3)$ ცხადია $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{6}$. ამიტომ (11) ფორმულის

ძალით $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = (\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{218}$. როგორც ვხედავთ ეს შანსი ძალიან ცოტაა.

VII. მათემატიკური კომპიუტერული პროგრამების შესახებ.

დინამიური მათემატიკის პროგრამა

www.geogebra.org

დამხმარე საკითხავი მასალა

ეს მასალა მოიცავს დინამიური მათემატიკის კომპიუტერული პროგრამის GeoGebra - ს გამოყენების საწყისებს. მასალის გაცნობის შემდეგ შესაძლებელი იქნება პროგრამის გამოყენება მათემატიკის და ზოგიერთი სხვა მომიჯნავე დისციპლინების სწავლე- ბისას, როგორც სწავლების საბაზო და საშუალო საფეხურზე, ასევე თვით უნივერ- სიტეტის საწყის კურსებზე. აქ წარმოდგენილი აქტივობების ერთობლიობა საშუა- ლებას იძლევა შევისწავლოთ პროგრამაში მოცემული გეომეტრიული ხელსაწყოები, ალგებრული გამოსახულებების შეტანის ფორმატი და პროგრამის ინტერფეისის სხვადასხვა ელემენტი. მასალა მოიცავს მრავალფეროვან მათემატიკურ საკითხებს, რომელთა დახმარებითაც შესაძლებელია პროგრამული უზრუნველყოფის მრავალ- მხრივი შესაძლებლობების შესწავლა და მისი გამოყენებით შექმნილი მასალის ინტეგრირება სასწავლო პროცესში.

შესავალი - პროგრამის ინსტალაცია და მისი ინტერფეისის ელემენტები

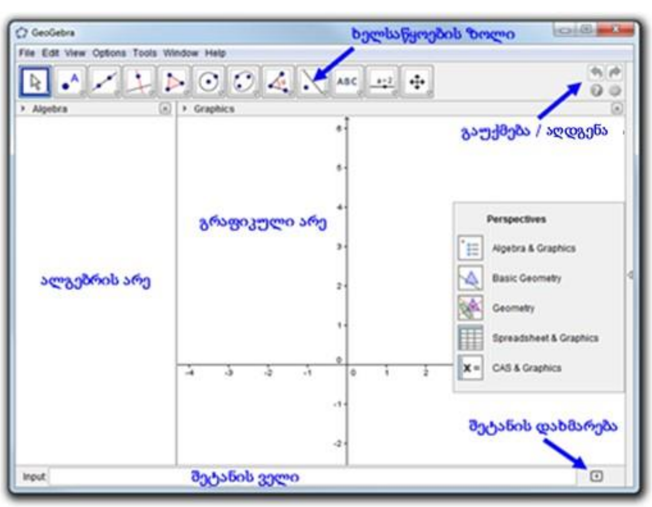
შესავალი

GeoGebra არის დინამიური მათემატიკის პროგრამული უზრუნველყოფა, რომელიც აერთიანებს გეომეტრიას, ალგებრას და კალკულუსის ელემენტებს. გარდა ამისა, იგი არის გეომეტრიის ინტერაქტიული სისტემა. მისი საშუალებით შეგვიძლია შევას- რულოთ გეომეტრიული აგებები წერტილების, მონაკვეთების, წრფეების, მრავალ- კუთხედების, ვექტორების და კონუსური კვეთების გამოყენებით. გარდა ამისა, შეგვიძლია ავაგოთ ფუნქციების გრაფიკები და შევასრულოთ პროცედურები, რომ- ლებიც მათანალიზის საკითხებთანაა დაკავშირებული. რაც ყველაზე მნიშვნე- ლოვანია, პროგრამა საშუალებას გვაძლევს რომ ვცვალოთ მათემატიკური ობიექ- ტების პარამეტრები და დავაკვირდეთ ამ ობიექტების ყოფაქცევას.

გარდა იმ აგებებისა, რომლებიც ხელსაწყოების საშუალებით ხორციელდება, ასევე შესაძლებელია კოორდინატებისა და განტოლებების შეტანა ბრძანებების ველის გამო- ყენებით. ამიტომ, პროგრამა იძლევა რიცხვებთან, ვექტორებთან, წერტილებთან და სხვა ობიექტებთან დაკავშირებული ცვლადების გამოყენების საშუალებას. მისი გამო- ყენებით შესაძლებელია წარმოებულების, ინტეგრალების გამოთვლა და სტატის- ტიკასთან დაკავშირებული პროცედურების შესრულება.

GeoGebra - ს სამომხმარებლო ინტერფეისი

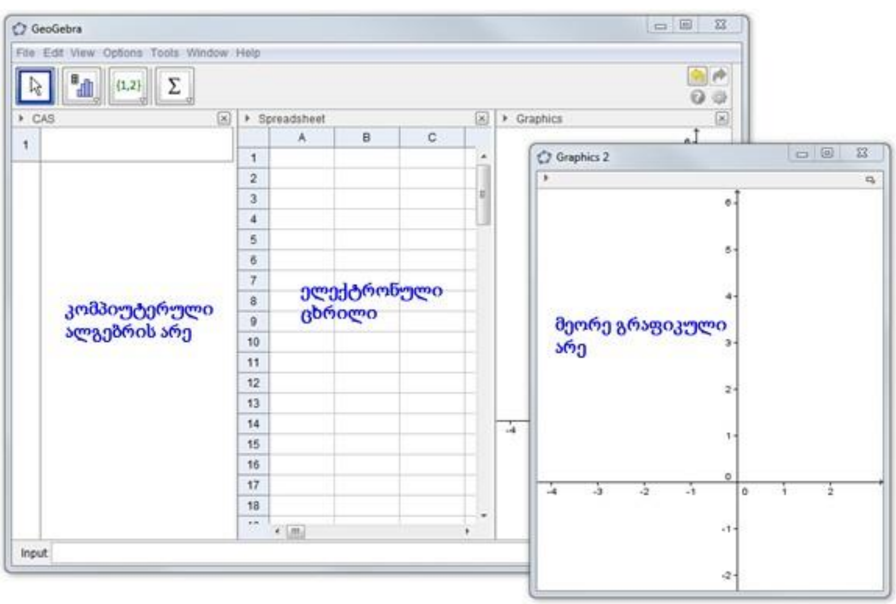
პროგრამის გაშვების შემდეგ გამოჩნდება ასეთი ფანჯარა



ხელსაწყოების ზოლზე განთავსებული გეომეტრიული ხელსაწყოების გამოყენებით შესაძლებელია გეომეტრიული აგებების შესრულება მაუსით ***გრაფიკულ არეზე.*** იმავდროულად, შესაბამისი კოორდინატები და განტოლებები გამოჩნდება ***ალგებრის არეში.*** მეორე მხრივ, შესაძლებელია ბრძანებების შეტანა შესაბამის ველში კლავიატურის გამოყენებით. ამგვარად, GeoGebra-ს ინტერფეისი საშუალებას იძლევა გეომეტრიას და ალგებრას დავაკვირდეთ ერთმანეთის გვერდზე.

პროგრამის სამომხმარებლო ინტერფეისი მოქნილია და იძლევა მოსწავლეების საჭიროებებზე მორგების საშუალებას. მაგალითად, თუ გვესაჭიროება მისი გამოყენება საბაზო საფეხურის დასაწყისში, მაშინ შეგვიძლია ვიმუშაოთ მხოლოდ ცარიელ გრაფიკულ არეზე გეომეტრიული ხელსაწყოების გამოყენებით. მოგვიანებით, როდესაც საჭიროა საკოორდინატო სისტემის და ღერძების შემოტანა, შესაძლებელია ბადის და ღერძების გამოჩენა. სწავლების საშუალო საფეხურზე მოსწავლეთა კომპეტენციები საშუალებას იძლევა გამოვიყენოთ ალგებრული გამოსახულებები შესაბამისი ბრძანებების გამოყენებით, რაც თავის მხრივ ხელს შეუწყობს ამ კომპეტენციების კიდევ უფრო განმტკიცებას და კალკულუსისკენ გადასვლას.

გრაფიკული და ალგებრის არეების გარდა GeoGebra გვთავაზობს ***ელექტრონული ცხრილის არეს***, ***კომპიუტერული ალგებრის*** არეს და ***მეორე გრაფიკულ არეს***. ამ სხვადასხვა არის დამალვა - გამოჩენა შესაძლებელია მენიუდან ***View***. ინტერფეისის წინასწარ განსაზღვრული კონფიგურაციების სწრაფად ცვლილება შესაძლებელია ***პერსპექტივების გვერდითი ზოლის*** გამოყენებითაც, რომელიც გამოჩნდება გრაფიკული არის მარჯვენა საზღვარზე დაწკაპუნების საშუალებით.



პროგრამის ინსტალაცია

GeoGebras ინსტალაცია შესაძლებელია ამ პროგრამის სასურველი ვარიანტის ჩამოტვირთვის შემდეგ ამ მისამართიდან www.geogebra.org/installers . აქ განთავსებულია პროგრამის ვარიანტები, რომლებიც თავსებადია სხვადასხვა ოპერაციულ სისტემებთან და პლატფორმებთან. აქვეა განთავსებული ბმული, რომლითაც გადავალთ პროგრამის იმ ვერსიაზე, რომლის გამოყენება შესაძლებელია ინსტალაციის გარეშე (http://www.geogebra.org/cms/en/portable).

პროგრამის გამოყენების საწყისები

გეომეტრიული ხელსაწყოების გამოყენება

ხელსაწყოს გააქტიურება შესაძლებელია ხელსწყოების ზოლზე მდებარე შესაბამის ღილაკზე მაუსის დაჭერით.

ხელსაწყოების ზოლზე ხელსაწყოები დაჯგუფებულია მსგავსი გეომეტრიული ობი- ექტების ან მოქმედებების მიხედვით. ჯგუფიდან სასურველი ხელსაწყოს ასარჩევად უნდა დავაჭიროთ ღილაკის ქვედა ბოლოში განთავსებულ ისარზე დაჭერის შემდეგ.

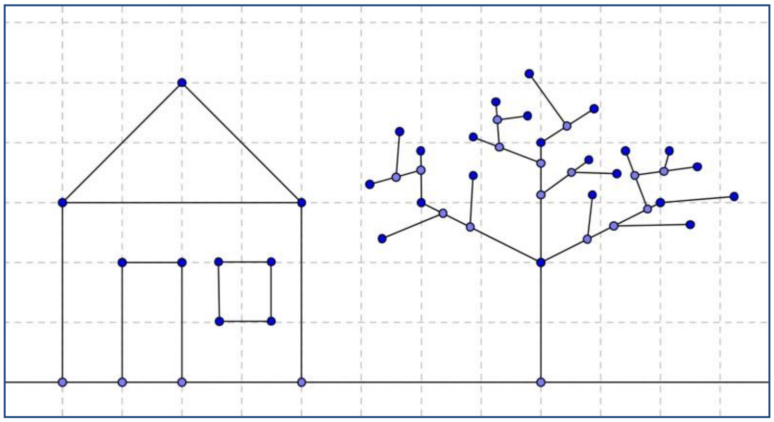
როგორ შევინახოთ და გავხსნათ GeoGebra-ს ფაილები

- გავხსნათ მენიუ ***File*** და ავირჩიოთ ***Save***.
- შევარჩიოთ სასურველი საქაღალდე.
- დავარქვათ ფაილს სახელი.
- დავაჭიროთ ღილაკს ***Save***.

GeoGebra-ს ფაილებს აქვს გაფართოება „.***ggb***“, რომელიც მიუთითებს ფაილის ტიპს და იმას, რომ ამ ფაილის გახსნა შესაძლებელია მხოლოდ GeoGebra-ს საშუალებით. სასურველია, რომ ფაილის სახელწოდებაში არ გამოვიყენოთ სპეციალური სიმბოლოები და ცარიელი სივრცე, რადგან ამან შესაძლოა პრობლემები შექმნას ამ ფაილების სხვა პლატფორმაზე გადატანის დროს. ცარიელი სივრცის მაგივრად უმჯობესია გამოვიყენოთ ქვედა ტირე. მაგალითად, *samkutxedis perimetri. ggb* - ს ნაცვლად უმჯობესია ფაილს ვუწოდოთ *samkutxedis_perimetri. ggb*.

- შენახული ფაილის გასახსნელად გამოვიყენოთ მენიუ ***File*** – ***Open***.
- გამოსულ ფანჯარაში გადავაადგილდეთ იმ საქაღალდეში, რომელშიც არის შენახული ფაილი.
- შევარჩიოთ ფაილი, რომლის გახსნაც გვსურს (რომლის გაფართოებაა „.***ggb***“) და დავაჭიროთ ღილაკს ***Open***.

დახურვისას პროგრამა ყოველთვის გვეკითხება გვსურს თუ არა შექმნილი მასალის შენახვა ფაილში.

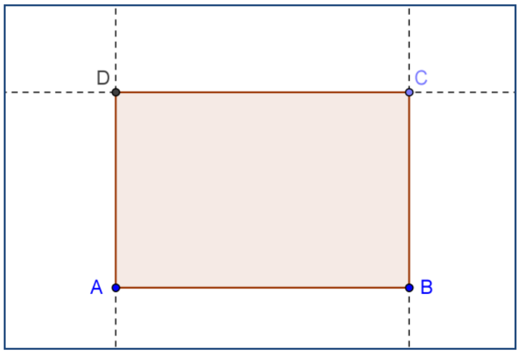


მარტივი ნახაზის შექმნა GeoGebra-ში

მარტივი ნახაზის შესაქმნელად შეიძლება გამოვიყენოთ მხოლოდ ის ხელსაწყოები, რომლებიც დაკავშირებულია წერტილებთან და ხაზებთან.

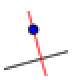
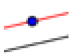
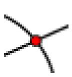
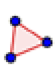
	New Point - ახალი წერტილი დავაწკაპოთ გრაფიკულ არეს ან არსებულ ობიექტს.
	Move - გადაადგილება თავისუფალი ობიექტის გადაადგილება მაუსით
	Line through Two Points - ორ წერტილზე გამავალი წრფე გრაფიკულ არეს დავაწკაპოთ ორჯერ მიმდევრობით ან მიმდევრობით ავირჩიოთ ორი არსებული წერტილი.
	Segment between Two Points - სეგმენტი მოცემული ბოლოებით გრაფიკულ არეზე დავაწკაპოთ ორჯერ მიმდევრობით ან მიმდევრობით ავირჩიოთ ორი არსებული წერტილი.
	Delete Object - ობიექტის წაშლა დავაწკაპოთ იმ ობიექტს, რომლის წაშლაც გვსურს.
	Undo / Redo - გაუქმება / აღდგენა შესრულებული მოქმედების გაუქმება / აღდგენა
	Move Graphics View - გრაფიკული არის გადაადგილება დავაჭიროთ და გადავაადგილოთ გრაფიკული არე მისი სასურველი ნაწილის გამოსაჩენად
	Zoom In / Zoom Out - მოახლოვება / დაშორება დავაწკაპოთ გრაფიკული არის შესაბამის ნაწილზე ამ ნაწილის მოსაახლოვებლად ან დასაშორებლად

ხელსაწყოს შესაბამის ღილაკთან მაუსის ისრის მიახლოებისას გამოჩნდება ამ ხელსაწყოსთან დაკავშირებული მითითება.



მაგალითი 1: მართკუთხედის აგება

საჭირო ხელსაწყოები

	**Perpendicular Line - მართობი წრფე** დავაწკაპოთ წრფეს და შემდეგ უკვე არსებულ წერტილს, ან ცარიელ ადგილს გრაფიკულ არეზე
	**Parallel Line - პარალელური წრფე** დავაწკაპოთ წრფეს და შემდეგ უკვე არსებულ წერტილს, ან ცარიელ ადგილს გრაფიკულ არეზე
	**Intersect Two Objects - ორი ობიექტის თანაკვეთა** დააწკაპეთ ორი ობიექტის თანაკვეთის წერტილს ამ წერტილის ასაგებად, ან ამ ორ ობიექტს თანმიმდევრობით, თანაკვეთის ყველა წერტილის მისაღებად
	**Polygon - მრავალკუთხედი** გრაფიკულ არეზე თანმიდევრობით დააწკაპეთ უკვე არსებულ წერტილებს ან ცარიელ ადგილებს, მრავალკუთხედის წვეროების ასაგებად. იმისათვის, რომ მრავალკუთხედი შეიკრას, ბოლოს დააჭირეთ პირველად არჩეულ წერტილს

აგების საფეხურები